# Aula 02 – Sequências

*ITA 2021*

**Professor Victor So**

# Sumário

# Introdução

Nessa aula estudaremos sequências, esse é um tema que costuma ser cobrado nos vestibulares militares. Veremos o que é uma sequência e também os tipos que podemos encontrar. Os mais conhecidos são a progressão aritmética e a progressão geométrica.

O importante nessa aula é que você entenda o raciocínio utilizado na resolução das questões. Se você for um aluno que possui uma base bem consolidada no assunto, você pode pular diretamente para a lista de questões e tentar resolver o máximo número de questões possível.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

# 1. Sequências

## 1.1. Definição

Chama-se sequência uma série de números onde para cada número natural corresponde um número real.

A notação usual para uma sequência é dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados de termos da sequência.

Os números que acompanham os termos são chamados de índices.

A sequência também pode ser representada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo:

O índice do primeiro termo $a_1$ da sequência é $1$.

O índice do segundo termo $a_2$ da sequência é $2$.

O índice do n-ésimo termo $a_n$ da sequência é $n$.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma sequência finita.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma sequência infinita. Os "..." indicam que a sequência segue indefinidamente.

## 1.2. Lei de Formação

A lei de formação de uma sequência permite calcular qualquer termo de uma sequência.

Exemplos:

1) $(1, 4, 9, 16, \dots)$

Sua lei de formação é dada por:

$$a_n = n^2$$

Essa lei é chamada de termo geral da sequência, pois conseguimos obter o valor de qualquer termo através dessa lei.

$$a_1 = 1^2 = 1\ (primeiro\ termo)$$
$$a_2 = 2^2 = 4\ (segundo\ termo)$$
$$a_3 = 3^2 = 9\ (terceiro\ termo)$$
$$\vdots$$

Formalmente, dizemos que essa lei de formação é uma função de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo termo geral $a_n$ possibilita obter o valor de qualquer termo da sequência.

2) $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

Famosa sequência de Fibonacci. Ela pode ser escrita através da seguinte lei de formação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$
$$F_2 = F_1 = 1$$

Essa lei é chamada de fórmula de recorrência, pois seus termos são obtidos através de termos anteriores. Importante salientar que os termos iniciais devem ser definidos para a fórmula de recorrência. Para o caso da sequência de Fibonacci, temos os termos iniciais $F_2 = F_1 = 1$.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$

**(Exercícios de Fixação)**

**1.** Dada as seguintes leis de formação, escreva os seus primeiros cinco termos:

a) $a_n = n + n^2, \forall n \geq 1$

b) $b_n = n + 2, \forall n \geq 1$

c) $c_n = (-n), \forall n \geq 1$

d) $d_1 = 1$ e $d_n = 4d_{n-1}, \forall n \geq 2$

e) $e_1 = 2$ e $e_n = e_{n-1}^2, \forall n \geq 2$

f) $f_1 = 2$ e $f_n = (-1)f_{n-1}, \forall n \geq 2$

**Resolução:**

a) $a_n = n + n^2, \forall n \geq 1$

$$a_1 = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$
$$a_3 = 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12$$
$$a_4 = 4 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$
$$a_5 = 5 + 5^2 = 5 + 25 = 30$$
$$\Rightarrow (2, 6, 12, 20, 30)$$

b) $b_n = n + 2, \forall n \geq 1$

$$b_1 = 1 + 2 = 3$$
$$b_2 = 2 + 2 = 4$$
$$b_3 = 3 + 2 = 5$$
$$b_4 = 4 + 2 = 6$$
$$b_5 = 5 + 2 = 7$$
$$\Rightarrow (3, 4, 5, 6, 7)$$

c) $c_n = (-n), \forall n \geq 1$

$$c_1 = (-1) = -1$$
$$c_2 = (-2) = -2$$
$$c_3 = (-3) = -3$$
$$c_4 = (-4) = -4$$
$$c_5 = (-5) = -5$$
$$\Rightarrow (-1, -2, -3, -4, -5)$$

d) $d_1 = 1$ e $d_n = 4d_{n-1}, \forall n \geq 2$

$$d_2 = 4d_1 = 4 \cdot 1 = 4$$
$$d_3 = 4d_2 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$d_4 = 4d_3 = 4 \cdot 16 = 64$$
$$d_5 = 4d_4 = 4 \cdot 64 = 256$$
$$\Rightarrow (2, 4, 16, 64, 256)$$

e) $e_1 = 2$ e $e_n = e_{n-1}^2, \forall n \geq 2$

$$e_2 = e_1^2 = 2^2 = 4$$
$$e_3 = e_2^2 = 4^2 = 16$$
$$e_4 = e_3^2 = 16^2 = 256$$
$$e_5 = e_4^2 = 256^2 = 65536$$
$$\Rightarrow (2, 4, 16, 256, 65536)$$

f) $f_1 = 2$ e $f_n = (-1)f_{n-1}, \forall n \geq 2$

$$f_2 = (-1)f_1 = (-1)2 = -2$$
$$f_3 = (-1)f_2 = (-1)(-2) = 2$$
$$f_4 = (-1)f_3 = (-1)2 = -2$$
$$f_5 = (-1)f_4 = (-1)(-2) = 2$$
$$\Rightarrow (2, -2, 2, -2, 2)$$

**Gabarito: a)** $\mathbf{(2, 6, 12, 20, 30)}$ **b)** $\mathbf{(3, 4, 5, 6, 7)}$ **c)** $\mathbf{(-1, -2, -3, -4, -5)}$ **d)** $\mathbf{(2, 4, 16, 64, 256)}$ **e)** $\mathbf{(2, 4, 16, 256, 65536)}$ **f)** $\mathbf{(2, -2, 2, -2, 2)}$

**2.** A soma dos termos iniciais de uma sequência é dada por:

$$S_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Calcule:

a) $a_2$

b) $a_{210}$

**Resolução:**

a) $a_2$

$$S_1 = a_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 = 4$$

Temos o valor de $a_1$ através de $S_1$, vamos substituir esse valor em $S_2$ para encontrar $a_2$:

$$1 + a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 3$$

b) $a_{210}$

Para calcular $a_{210}$, devemos calcular a soma $S_{210}$ e subtrair $S_{209}$. Veja:

$$S_{210} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{209} + a_{210}$$
$$S_{209} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{209}$$

Perceba que $S_{209}$ está escrito na soma $S_{210}$. Vamos inserir $S_{209}$ na equação de $S_{210}$:

$$S_{210} = S_{209} + a_{210}$$
$$a_{210} = S_{210} - S_{209}$$

Usando a fórmula dada para $n = 210$ e $n = 209$, temos:

$$a_{210} = 210^2 - 209^2$$

Podemos fatorar esse número:

$$a_{210} = (210 - 209)(210 + 209)$$
$$a_{210} = 1(419) = 419$$

**Gabarito: a)** $\mathbf{a_2 = 3}$ **b)** $\mathbf{a_{210} = 419}$

# 2. Progressão Aritmética (PA)

## 2.1. Definição

Uma sequência é uma progressão aritmética quando sua lei de formação é dada por:

$$\boldsymbol{a_1 = a}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + r}$$

$a_1$ é o primeiro termo da PA e $r$ é sua razão.

$a_n = a_{n-1} + r$ é a fórmula de recorrência da PA.

Para verificarmos se uma sequência é uma PA, basta verificar se a diferença entre seus termos consecutivos resulta em uma constante.

Exemplos:

1) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Essa sequência é uma PA de razão $r = 1$, pois:

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$$
$$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$$
$$a_5 - a_4 = 5 - 4 = 1$$
$$a_6 - a_5 = 6 - 5 = 1$$
$$a_7 - a_6 = 7 - 6 = 1$$

Perceba que essa sequência segue a lei de formação:

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

2) $(-4, 0, 4)$

PA de razão $r = 4$.

$$a_2 - a_1 = 0 - (-4) = 4$$
$$a_3 - a_2 = 4 - 0 = 4$$

## 2.2. Classificação

Uma progressão aritmética pode ser classificada de acordo com sua razão.

### 2.2.1. PA crescente

$$r > 0 \Rightarrow PA\ crescente$$

$(2, 6, 10, 14, 18)$ é uma PA crescente de razão $r = 4 > 0$

### 2.2.2. PA constante

$$r = 0 \Rightarrow PA\ constante$$

$(3, 3, 3, 3, 3)$ é uma PA constante de razão $r = 0$

### 2.2.3. PA decrescente

$$r < 0 \Rightarrow PA\ decrescente$$

$(10, 5, 0, -5, -10)$ é uma PA decrescente de razão $r = -5 < 0$

## 2.3. Termo Geral

Podemos encontrar o termo geral da PA através da fórmula de recorrência. Vamos escrever cada termo da PA através dessa fórmula:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando todos os termos, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)r$$

Os termos em vermelho se cancelam, então podemos escrever:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Esse é o termo geral da PA.

$a_n$ é chamado de n-ésimo termo da PA.

Também podemos escrever o termo geral em função de outro termo que não seja o primeiro. Vamos escrever os termos a partir do índice $p > 1\ e\ p \in \mathbb{N}$. Usando o termo geral encontrado para $p$ e $n$:

$$a_p = a_1 + (p-1)r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Fazendo $a_n - a_p$, obtemos:

$$a_n - a_p = a_1 + (n-1)r - [a_1 + (p-1)r]$$

$$a_n - a_p = a_1 + (n-1)r - a_1 - (p-1)r$$

$$a_n - a_p = [(n-1) - (p-1)]r$$

$$a_n - a_p = (n-p)r$$

$$\boldsymbol{a_n = a_p + (n-p)r}$$

Esse é o termo geral em função de qualquer índice.

## 2.4. Propriedades

### 2.4.1. Termos Equidistantes

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão $r$.

$$\boldsymbol{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} + a_{n-j} = cte}$$

Essa propriedade diz que a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma dos extremos $(a_1 + a_n)$.

Termos equidistantes são os termos que possuem a soma dos índices iguais a $1 + n$. Veja:

$$a_1 + a_n \Rightarrow soma\ dos\ índices = 1 + n$$

$$a_2 + a_{n-1} \Rightarrow soma\ dos\ índices = 2 + (n-1) = 1 + n$$

$$a_{j+1} + a_{n-j} \Rightarrow soma\ dos\ índices = (j+1) + (n-j) = 1 + n$$

Vamos demonstrar essa propriedade:

Suponha $j \in \mathbb{N}$ e $j > 1$, vamos escrever $a_{j+1} + a_{n-j}$ usando o termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{j+1} = a_1 + \big((j+1) - 1\big)r = a_1 + jr$$

$$a_{n-j} = a_1 + [(n-j) - 1]r$$

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + jr + \{a_1 + [(n-j) - 1]r\}$$

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + jr + a_1 + nr - jr - r$$

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_1 + nr - r$$

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_1 + (n-1)r$$

Perceba que $a_n = a_1 + (n-1)r$. Substituindo na equação, obtemos:

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_n$$

Portanto provamos que para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e $j > 1$, a soma dos termos equidistantes resulta em um número constante $(a_1 + a_n)$.

### 2.4.2. Soma dos Termos da PA

A soma dos termos de uma PA é dada pela fórmula:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

**Demonstração:**

Vamos escrever $S_n$ como a soma de todos os $n$ termos de uma PA:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Também podemos escrever a soma $S_n$, invertendo a ordem dos termos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Somando essas duas equações e juntando os termos equidistantes:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pela propriedade dos termos equidistantes da PA, vamos escrever as somas em função de $(a_1 + a_n)$:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\ termos}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

TOME NOTA!

A soma dos $n$ termos de uma sequência também pode ser representada dessa forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$\sum$ é o símbolo usado para representar um somatório.

O índice $j$ abaixo desse símbolo indica o primeiro termo do somatório e o índice $n$ indica até qual índice vai o somatório.

Exemplo:

$$\sum_{j=2}^{5} a_j = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Para o caso de uma PA com $n$ termos e $n$ ímpar, podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot n}$$

Onde $a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ é o termo médio da PA.

**Demonstração:**

Podemos usar a fórmula da soma dos termos da PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos que provar que:

$$a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Usando o termo geral da PA, temos:

$$a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = a_1 + \left(\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1\right)r = a_1 + \frac{(n-1)}{2}r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Calculando $a_1 + a_n$:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r$$

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$$

Dividindo por 2:

$$\frac{(a_1 + a_n)}{2} = a_1 + \frac{(n-1)r}{2} = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Logo, para $n$ ímpar:

$$S_n = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot n$$

### 2.4.3. Média Aritmética

$$\boldsymbol{a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}}$$

Essa propriedade é muito útil para resolução de diversas questões envolvendo PA, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão. Isso facilita os cálculos.

**Demonstração:**

Vamos escrever $a_{j-1}$ e $a_{j+1}$, usando o termo geral:

$$a_{j-1} = a_1 + ((j-1) - 1)r = a_1 + (j-2)r$$

$$a_{j+1} = a_1 + ((j+1) - 1)r = a_1 + jr$$

Somando os dois termos, obtemos:

$$a_{j-1} + a_{j+1} = [a_1 + (j-2)r] + (a_1 + jr)$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = a_1 + jr - 2r + a_1 + jr$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = 2a_1 + 2jr - 2r$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = 2[a_1 + (j-1)r]$$

$$a_j = a_1 + (j-1)r \Rightarrow a_{j-1} + a_{j+1} = 2a_j$$

$$a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}$$

Um termo de uma PA pode ser escrito como a média dos seus termos vizinhos.

Para a prova, grave:

Se tivermos uma PA $(a_1, a_2, a_3)$, podemos escrever $a_2$ como a média aritmética de $a_1$ e $a_3$:

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}}$$

### 2.4.4. Notação Especial

$$\boldsymbol{PA\ com\ 3\ termos}:$$

$$\boldsymbol{(x - r, x, x + r)}$$

$$\boldsymbol{PA\ com\ 4\ termos}:$$

$$\boldsymbol{(x - 3r', x - r', x + r', x + 3r')}$$

$$\boldsymbol{PA\ com\ 5\ termos}:$$

$$\boldsymbol{(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)}$$

Essa propriedade é útil para facilitar os cálculos de problemas envolvendo PA. Representamos seus termos em função de um $x$ e $r$. Note que a razão da PA com 4 termos é $r = 2r'$.

**(Exercícios de Fixação)**

**3.** Dado $a_1 = 3$ e $r = 5$, o primeiro termo e a razão de uma PA, respectivamente. Calcule:

a) $a_{10}$

b) $a_{20}$

**Resolução:**

a) $a_{10}$

Temos os dados do primeiro termo e a razão da PA. Vamos usar o termo geral da PA para calcular $a_{10}$:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{10} = 3 + (10 - 1)5$$

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 5$$

$$a_{10} = 48$$

b) $a_{20}$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{20} = 3 + (20-1)5$$
$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 5$$
$$a_{20} = 98$$

**Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{10} = 48}$ b) $\boldsymbol{a_{20} = 98}$**

**4.** Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50})$ uma PA de razão $r$. Dado $a_{10} = 24$ e $a_{20} = 44$, calcule $a_1$ e $r$.

**Resolução:**

Vamos escrever $a_{10}$ e $a_{20}$ usando o termo geral da PA.

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r = 24 \Rightarrow a_1 + 9r = 24\ (I)$$
$$a_{20} = a_1 + (20-1)r = 44 \Rightarrow a_1 + 19r = 44\ (II)$$

Fazendo $(II) - (I)$, obtemos:

$$(a_1 + 19r) - (a_1 + 9r) = 44 - 24$$
$$a_1 + 19r - a_1 - 9r = 20$$
$$10r = 20$$
$$r = 2$$

Substituindo $r = 2$ em $(I)$ para encontrar $a_1$:

$$a_1 + 9(2) = 24$$
$$a_1 + 18 = 24$$
$$a_1 = 6$$

**Gabarito: $\boldsymbol{a_1 = 6}$ e $\boldsymbol{r = 2}$**

**5.** Obter a soma dos 30 primeiros termos da PA $(10, 5, 0, -5, \dots)$.

**Resolução:**

Vamos aplicar a fórmula da soma:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2} = (a_1 + a_{30})15$$

Sabemos $a_1$, precisamos calcular $a_{30}$ e a razão $r$. Calculando $r$:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$5 = 10 + r$$

$$r = -5$$

Usando o termo geral para calcular $a_{30}$:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)r$$
$$a_{30} = 10 + 29 \cdot (-5)$$
$$a_{30} = 10 - 145 = -135$$

Substituindo os valores em $S_{30}$:

$$S_{30} = \big(10 + (-135)\big)15$$
$$S_{30} = (-125)15 = -1875$$

**Gabarito: $S_{30} = -1875$**

**6.** Dado $S_n = n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos $n$ termos de uma PA. Calcular o primeiro termo e a razão da PA.

**Resolução:**

Para calcular $a_1$, podemos substituir $n = 1$ em $S_n$:

$$S_n = n^2 + n$$
$$S_1 = a_1$$
$$S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

Para descobrir a razão $r$, vamos calcular o segundo termo através de $S_2$:

$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_1 + a_2 = 6$$
$$2 + a_2 = 6$$
$$a_2 = 4$$

A razão será dada por:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$r = a_2 - a_1$$
$$r = 4 - 2 = 2$$

**Gabarito: $a_1 = 2$ e $r = 2$**

**7.** Obter 3 números em PA de modo que sua soma seja 21 e a soma de seus quadrados seja 165.

**Resolução:**

Temos que encontrar uma PA com 3 termos que satisfaça às condições da questão.

Vamos representar a PA da seguinte forma:

$$(x-r, x, x+r)$$

Assim, a soma dos seus termos é dado por:

$$(x-r)+x+(x+r)=21$$
$$3x=21$$
$$x=7$$

A soma de seus quadrados é:

$$(x-r)^2+x^2+(x+r)^2=165$$

Substituindo $x=7$ na equação e desenvolvendo seus termos:

$$(7-r)^2+7^2+(7+r)^2=165$$
$$49-14r+r^2+49+49+14r+r^2=165$$
$$2r^2+3\cdot 49=165$$
$$2r^2+147=165$$
$$2r^2=18$$
$$r^2=9$$
$$r=\pm 3$$

Encontramos $x=7$ e $r=\pm 3$. Temos duas PA's:

$$r=3 \Rightarrow (7-3,7,7+3)=(4,7,10)\ PA\ crescente$$
$$r=-3 \Rightarrow \left(7-(-3),7,7+(-3)\right)=(10,7,4)\ PA\ decrescente$$

**Gabarito:** $(\mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{10})$ **e** $(\mathbf{10}, \mathbf{7}, \mathbf{4})$

**8.** Interpolando-se 5 termos entre os números 2 e 20, obtemos uma PA. Ache a razão de interpolação e escreva a PA formada.

**Resolução:**

Os números 2 e 20 são os extremos da PA. Quando interpolamos, inserimos termos entre esses extremos. Com isso, a interpolação de 5 termos entre 2 e 20 gera uma PA com 7 termos ($5\ termos + 2\ extremos$).

Vamos formar a PA e calcular a razão.

$$a_1=2 \text{ e } a_7=20$$
$$a_7=a_1+(7-1)r$$
$$20=2+6r$$
$$18=6r$$
$$r=3$$

Temos os valores de $a_1$ e $r$, a PA formada é:

$$(2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 20)$$

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$$

**Gabarito:** $\mathbf{(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)}$

**9.** Interpolando-se $n$ vezes, $n \in \mathbb{N}$, entre os números $n$ e $n^2 + 3n + 1$ obtemos uma PA. Achar a razão de interpolação.

**Resolução:**

Interpolar $n$ vezes significa inserir $n$ termos entre os extremos. A PA que procuramos possui a forma:

$$(n, \underbrace{a_2, a_3, \dots, a_{n+1}}_{n\ termos}, n^2 + 3n + 1)$$

Perceba que essa PA possui $n + 2$ termos.

Os extremos são:

$$a_1 = n$$
$$a_{n+2} = n^2 + 3n + 1$$

Escrevendo os extremos usando o termo geral da PA, obtemos:

$$a_{n+2} = a_1 + [(n + 2) - 1]r$$
$$n^2 + 3n + 1 = n + (n + 1)r$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)r$$

Fatorando e simplificando:

$$(n + 1)^2 = (n + 1)r$$
$$r = n + 1$$

∴A razão de interpolação da PA obtida é $r = n + 1$

**Gabarito:** $\mathbf{r = n + 1}$

## 2.5. Progressão Aritmética de Ordem Superior

Esse assunto é um aprofundamento da Progressão Aritmética e dificilmente é cobrado nos vestibulares, mas nada impede que isso aconteça no seu ano! Veremos apenas como proceder com a questão, caso caia algo parecido na prova, você saberá resolvê-la. Alguns assuntos que serão usados nesse tópico ainda serão aprendidos em aulas futuras. Caso você não entenda, tente memorizar o bizu de como proceder.

### 2.5.1. Definição

A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma PA de ordem $k$, se após "$k$ diferenças" entre os termos consecutivos obtivermos uma PA estacionária, ou seja, uma PA com razão nula.

Exemplo:

1) $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$

Se subtrairmos cada termo dessa sequência para encontrar a razão, vemos que a razão não é constante:

$$r = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$r' = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$

Vamos obter outra sequência através da subtração de seus termos consecutivos. Seu termo é da forma $b_i = a_{i+1} - a_i$.

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 8 - 4 = 4$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 15 - 8 = 7$$
$$b_5 = a_6 - a_5 = 26 - 15 = 11$$

Após a **primeira diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Novamente, a sequência obtida ainda não é uma PA estacionária. Vamos obter outra sequência aplicando a mesma ideia:

$$c_1 = b_2 - b_1 = 2 - 1 = 1$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = 4 - 2 = 2$$
$$c_3 = b_4 - b_3 = 7 - 4 = 3$$
$$c_4 = b_5 - b_4 = 11 - 7 = 4$$

Após a **segunda diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)$$

Perceba que esses termos possuem uma razão constante $r = 1$.

A sequência obtida é uma PA de primeira ordem.

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ primeira\ ordem$$

Subtraindo os termos consecutivos dessa PA, obtemos uma PA estacionária após a **terceira diferença**:

$$(1, 1, 1, 1, \dots)\ PA\ estacionária$$

Assim, a sequência $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$ é uma PA de ordem 3, pois foram necessárias 3 diferenças entre os termos consecutivos para se obter uma PA estacionária.

As progressões aritméticas de ordem superior são classificadas da seguinte forma:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 1$$
$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 2$$
$$(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 3$$

Assim, a PA do exemplo é de terceira ordem.

### 2.5.2. Teorema do Termo Geral

$$\boldsymbol{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)\ PA\ de\ ordem\ k \Leftrightarrow a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \cdots + A_1 n^1 + A_0}$$

Se encontrarmos uma PA de ordem $k$, podemos escrever o seu termo geral em função de um polinômio de grau $k$ em $n$.

$A_i, 0 \leq i \leq k$, é o coeficiente do polinômio.

$$a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \cdots + A_1 n^1 + A_0$$

*Ainda estudaremos polinômios. No termo acima, $A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \cdots + A_1 n^1 + A_0$ é um polinômio de ordem $k$ (maior expoente de $n$). $(k, k-1, k-2, \dots)$ são os expoentes de $n$ e $n$ é a variável do polinômio.

Vamos encontrar o termo geral da seguinte PA de ordem superior:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Vimos que essa sequência é uma PA de ordem 2 (exemplo do tópico anterior). Então de acordo com o teorema, podemos escrever seu termo geral como um polinômio de grau 2:

$$a_n = An^2 + Bn + C$$

Precisamos encontrar os valores de $A, B, C$. Para isso, podemos obter esses valores através dos dados da PA de ordem 2. Como temos três variáveis, devemos ter três equações para encontrar seus valores (para encontrar os coeficientes do polinômio com $n$ variáveis, devemos ter $n$ equações).

$$a_1 = 1 \Rightarrow A(1)^2 + B(1) + C = 1 \Rightarrow A + B + C = 1$$
$$a_2 = 2 \Rightarrow A(2)^2 + B(2) + C = 2 \Rightarrow 4A + 2B + C = 2$$
$$a_3 = 4 \Rightarrow A(3)^2 + B(3) + C = 4 \Rightarrow 9A + 3B + C = 4$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 & (I) \\ 4A + 2B + C = 2 & (II) \\ 9A + 3B + C = 4 & (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III) - (II)$ e $(II) - (I)$:

$$(III) - (II): 5A + B = 2\ \ (IV)$$
$$(II) - (I): 3A + B = 1\ \ (V)$$
$$(IV) - (V): 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/2$ em $(V)$:

$$3A + B = 1 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Substituindo $A$ e $B$ em $(I)$:

$$A + B + C = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Logo, o termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$$

### 2.5.3. Teorema da Soma dos Termos

$$\boldsymbol{(a_1, a_2, \dots, a_n)\ PA\ de\ ordem\ K \to S_n = A_{k+1}n^{k+1} + A_k n^k + \cdots + A_1 n + A_0}$$

A soma dos termos de uma PA de $k$-ésima ordem é dada por um polinômio de grau $k+1$ na variável $n$, sendo $n$ o número de termos da sequência.

**10. (IME/2000)** Determine o polinômio em $n$, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos $n$ primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

**Resolução:**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Queremos um polinômio de grau $n$ que representa a soma acima. Analisemos os termos dessa soma. Sabemos que cada termo é da forma $a_k = k^2$, logo:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \to (1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2)$$

Perceba que subtraindo os termos consecutivos dessa sequência, obtemos uma PA estacionária:

$$\underbrace{(3, 5, 7, 9, 11, \dots)}_{PA\ de\ razão\ 2}$$

Logo, a sequência formada pelos termos da soma do problema é uma PA de ordem 2. De acordo com o teorema da soma, podemos escrever $S_n$ como um polinômio de grau 3:

$$S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Temos 4 incógnitas $(A, B, C, D)$, então precisamos de 4 equações:

$$S_1 = A(1)^3 + B(1)^2 + C(1) + D = A + B + C + D = 1 \quad (I)$$

$$S_2 = A(2)^3 + B(2)^2 + C(2) + D = 8A + 4B + 2C + D = 5 \quad (II)$$

$$S_3 = A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 27A + 9B + 3C + D = 14 \quad (III)$$

$$S_4 = A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 64A + 16B + 4C + D = 30 \quad (IV)$$

$(IV) - (III)$:

$$37A + 7B + C = 16 \quad (V)$$

$(III) - (II)$:

$$19A + 5B + C = 9 \quad (VI)$$

$(II) - (I)$:

$$7A + 3B + C = 4 \quad (VII)$$

$(V) - (VI)$:

$$18A + 2B = 7 \quad (VIII)$$

$(VI) - (VII)$:

$$12A + 2B = 5 \quad (IX)$$

$(VIII) - (IX)$:

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Substituindo $A = 1/3$ em $(IX)$:

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 2B = 5$$

$$4 + 2B = 5$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/3$ e $B = 1/2$ em $(VII)$:

$$7\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + C = 4$$

$$\frac{7}{3} + \frac{3}{2} + C = 4$$

$$\frac{(14 + 9)}{6} + C = 4$$

$$\frac{23}{6} + C = 4$$

$$C = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$$

Substituindo $A, B, C$ em $(I)$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+D=1$$

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+D=1$$

$$\frac{6}{6}+D=1$$

$$D=0$$

Assim, obtemos o polinômio:

$$S_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n}$

# 3. Progressão Geométrica (PG)

## 3.1. Definição

Uma sequência é uma progressão geométrica quando sua lei de formação é dada por:

$$\boldsymbol{a_1=a}$$
$$\boldsymbol{a_n=a_{n-1}q}$$

$a_1$ é o primeiro termo da PG e $q$ é sua razão.

$a_n=a_{n-1}q$ é a fórmula de recorrência da PG.

Exemplos:

1) $(1, 3, 9, 27, \dots)$

PG cujo primeiro termo é $a_1=1$ e sua razão é:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}=3$$

2) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$

PG com $a_1=1$ e razão:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

3) $(3, -9, 27, -81, \dots)$

PG com $a_1=3$ e razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-9}{3} = -3$$

## 3.2. Termo Geral

Vamos encontrar o termo geral da PG através da fórmula de recorrência. Escrevendo os termos:

$$a_n = a_{n-1}q$$
$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$
$$a_4 = a_3 q$$
$$a_5 = a_4 q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1}q$$

Perceba que temos $n - 1$ termos.

Vamos multiplicá-los:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1\ termos}$$

Os termos em vermelho se cancelam e assim obtemos:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Essa é o termo geral da PG.

Também podemos escrever o termo geral em função de um termo qualquer da PG.

Usando o termo geral, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_p = a_1 q^{p-1}$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_1}{a_1}\frac{q^{n-1}}{q^{p-1}}$$

$$a_n = a_p q^{(n-1)-(p-1)}$$

$$\boxed{a_n = a_p q^{(n-p)}}$$

## 3.3. Propriedades

### 3.3.1. Termos Equidistantes

$$\boldsymbol{a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} a_{n-j} = cte}$$

O produto dos termos equidistantes é um valor constante e a soma dos índices é igual à $n + 1$.

Para provar essa propriedade, vamos escrever os termos equidistantes generalizados $a_{j+1}$ e $a_{n-j}, j \in \mathbb{N}$, usando o termo geral da PG.

$$a_{j+1} = a_1 q^{[(j+1)-1]} = a_1 q^j$$

$$a_{n-j} = a_1 q^{[(n-j)-1]}$$

Multiplicando os dois termos, temos:

$$a_{j+1} a_{n-j} = (a_1 q^j)\left(a_1 q^{[(n-j)-1]}\right)$$

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_1 q^j q^{[(n-j)-1]}$$

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_1 q^{n-1}$$

Sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, substituindo na equação acima:

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_n$$

Logo, o produto dos termos equidistantes é igual ao valor do produto dos extremos.

### 3.3.2. Soma dos Termos da PG finita

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

**Demonstração:**

Vamos calcular a soma da PG finita:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo os termos usando o termo geral:

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Substituindo em $S_n$:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando $S_n$ por $q$, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \cdots + a_1q^n$$

Subtraindo as duas equações:

$$S_n - qS_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} - (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \cdots + a_1q^n)$$

Repare que os termos em vermelho se cancelam.

Dessa forma:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Também podemos escrever:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)(-1)}{(1-q)(-1)} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

### 3.3.3. Soma dos Termos da PG infinita

$$\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1-q}, -1 < q < 1}$$

Quando temos uma PG infinita de razão absoluta menor que 1, a soma dos seus termos converge para $a_1/(1-q)$.

**Demonstração:**

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)\ PG\ infinita$$

Vamos escrever a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q}$$

Se $-1 < q < 1$ e a PG é infinita podemos escrever:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 - a_1q^n}{1-q}\right)$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 - a_1\cancel{q^n}}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}$$

Veja a sequência:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

Perceba que os valores vão diminuindo à medida que o índice aumenta. Vamos calcular $a_{10}$:

$$a_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \cong 0{,}001$$

Agora, veja $a_{20}$:

$$a_{20} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576} \cong 0{,}000001$$

Se tentarmos calcular $a_n$ tal que $n$ seja tão grande, vamos obter um valor muito próximo de zero.

Assim, quando $n$ tende ao infinito, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Essa propriedade é válida para números pertencentes ao intervalo $]-1, 1[$.

### 3.3.4. Produto dos Termos da PG

O produto dos termos de uma PG é dado por:

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

**Demonstração:**

Vamos representar os termos da PG usando o termo geral:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando os termos da PG, obtemos:

$$\underbrace{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot \dots \cdot a_n}_{P_n} = \underbrace{a_1 a_1 a_1 a_1 \cdot \dots \cdot a_1}_{n\ fatores} \left( \underbrace{q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \dots \cdot q^{n-1}}_{n-1\ fatores} \right)$$

$$P_n = a_1^n q^{1+2+3+..+(n-1)}$$

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ é uma soma de PA de razão 1.

Aplicando a fórmula da soma da PA:

$$S_{n-1} = \frac{\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo em $P_n$:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

O produto dos termos de uma sequência também pode ser representado dessa forma:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$\prod$ é o símbolo usado para representar o produtório de uma sequência. Ela parte do termo de índice $j = 1$ e vai até o termo de índice $n$.

Para $n$ ímpar, podemos escrever:

$$\boldsymbol{P_n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n}$$

Onde $a_{\frac{n+1}{2}}$ é o termo médio da PG.

**Demonstração:**

Usando o termo geral da PG, temos:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 q^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = a_1 q^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Pela fórmula dos produtos dos termos da PG, temos:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n$$

### 3.3.5. Média Geométrica

$$\boldsymbol{a_j^2 = a_{j-1} a_{j+1}}$$

Essa propriedade facilita as resoluções das questões de PG, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão.

**Demonstração:**

Representando $a_{j-1}$ e $a_{j+1}$ usando o termo geral da PG:

$$a_{j-1} = a_1 q^{(j-1)-1} = a_1 q^{j-2}$$
$$a_{j+1} = a_1 q^{(j+1)-1} = a_1 q^{j}$$

Multiplicando os termos, obtemos:

$$a_{j-1}a_{j+1} = a_1 q^{j-2} a_1 q^{j} = a_1^2 q^{2j-2} = a_1^2 q^{2(j-1)} = [a_1 q^{j-1}]^2 = a_j^2$$
$$\Rightarrow a_{j-1}a_{j+1} = a_j^2$$

Assim, para uma PG $(a_1, a_2, a_3)$, podemos escrever $a_2$ como a média geométrica de $a_1$ e $a_3$:

$$\boxed{\boldsymbol{a_2^2 = a_1 a_3}}$$

### 3.3.6. Notação Especial

$$\boldsymbol{PG\ com\ 3\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x, xq, xq^2)\ ou\ \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)}}$$

$$\boldsymbol{PG\ com\ 4\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x, xq, xq^2, xq^3)\ ou\ \left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3\right)}}$$

$$\boldsymbol{PG\ com\ 5\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)\ ou\ (\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)}}$$

Note que a razão da PG com 4 termos é $q = y^2$.

**(Exercícios de Fixação)**

**11.** Dado a PG $(2, -4, 8, -16, 32, \dots)$, calcule:

a) $a_{20}$

b) $a_{30}$

**Resolução:**

a) Para calcular os termos da PG, precisamos encontrar sua razão. Podemos aplicar a fórmula de recorrência:

$$a_2 = a_1 q$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Observando a sequência, $a_2 = -4$ e $a_1 = 2$. Substituindo na fórmula acima:

$$q = \frac{-4}{2} = -2$$

Usando o termo geral para calcular $a_{20}$:

$$a_{20} = a_1 q^{20-1} = a_1 q^{19}$$
$$a_{20} = 2(-2)^{19} = -2^{20}$$

b) Conhecemos a razão e o termo inicial, vamos aplicar o termo geral:

$$a_{30} = a_1 q^{30-1} = a_1 q^{29}$$
$$a_{30} = 2(-2)^{29} = -2^{30}$$

**Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{20} = -2^{20}}$ b) $\boldsymbol{a_{30} = -2^{30}}$**

**12.** Dado $a_3 = 9$ e $a_6 = 243$, termos de uma PG. Calcule $a_{100}$.

**Resolução:**

Vamos usar o termo geral para encontrar a razão:

$$a_n = a_p q^{n-p}$$
$$a_6 = a_3 q^{6-3}$$
$$a_6 = a_3 q^3$$
$$243 = 9q^3$$
$$q^3 = \frac{243}{9} = 27 = 3^3$$
$$q^3 = 3^3$$
$$q = 3$$

Agora, aplicando o termo geral para $a_{100}$:

$$a_{100} = a_3 q^{100-3} = a_3 q^{97}$$

Sabemos que $a_3 = 9$ e $q = 3$, dessa forma:

$$a_{100} = 9(3)^{97} = 3^2 3^{97} = 3^{99}$$

**Gabarito: $\boldsymbol{a_{100} = 3^{99}}$**

**13.** Que número deve ser somado aos termos da sequência $(-2, 8, 68)$ para que se tenha uma PG?

**Resolução:**

Temos que descobrir o valor de $x$ para que a sequência $(-2 + x, 8 + x, 68 + x)$ seja uma PG.

Vamos escrever a razão em função dos termos. Veja:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8+x}{-2+x}$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{68+x}{8+x}$$

Igualando as duas equações, obtemos:

$$\frac{8+x}{-2+x} = \frac{68+x}{8+x}$$

Resolvendo a equação:

$$(8+x)^2 = (68+x)(-2+x)$$

$$64 + 16x + x^2 = -136 + 66x + x^2$$

$$200 = 50x$$

$$x = 4$$

Substituindo $x = 4$ em uma das equações para encontrar o valor da razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8+x}{-2+x} = \frac{8+4}{-2+4} = \frac{12}{2} = 6$$

Portanto, se adicionarmos 4 a cada termo da sequência, obteremos uma PG de razão $q = 6$.

**Gabarito: $x = 4$**

**14.** Quantos termos tem a PG $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2048}\right)$?

**Resolução:**

Vamos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Agora, podemos escrever o último termo em função de $n$:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{2048} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pela fatoração $2048 = 2^{11}$

Desse modo:

$$\frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Igualando os expoentes:

$$11 = n - 1$$
$$n = 12$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{n = 12}$

**15.** Em uma PG com 3 termos, a soma dos seus termos é 31 e o produto deles é 125. Obtenha a PG.

**Resolução:**

Vamos escrever a PG usando a notação especial para 3 termos:

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

Segundo o enunciado, temos:

$$P_3 = a_1 a_2 a_3 = 125$$
$$P_3 = \left(\frac{x}{q}\right) x(xq) = 125$$
$$x^3 = 5^3$$
$$x = 5$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 31$$
$$S_3 = \frac{x}{q} + x + xq = 31$$
$$x\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 31$$

Substituindo $x = 5$ na equação:

$$5\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 31$$

Resolvendo a equação:

$$\frac{5(1 + q + q^2)}{q} = 31$$
$$5 + 5q + 5q^2 = 31q$$
$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

Temos que encontrar as raízes dessa equação quadrática:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$q = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$
$$q = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10} = 5 \ ou \ \frac{1}{5}$$

Assim, encontramos duas razões e consequentemente temos duas PGs.

$$q = 5 \Rightarrow \left(5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right), 5, 5 \cdot 5\right) = (1, 5, 25)$$

A outra razão é o inverso dessa que acabamos de encontrar.

$$q' = \frac{1}{5} = \frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{x}{q'}, x, xq'\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{\frac{1}{q}}, x, x\left(\frac{1}{q}\right)\right) \Rightarrow \left(xq, x, \frac{x}{q}\right)$$

A segunda PG possui os mesmos termos que a primeira com a ordem invertida:

$$(25, 5, 1)$$

**Gabarito:** $\mathbf{(1, 5, 25)}$ **ou** $\mathbf{(25, 5, 1)}$

**16.** Determine a soma de todos os divisores positivos de 8192.

**Resolução:**

Vamos fatorar o número 8192:

| | |
|---|---|
| 8192 | 2 |
| 4096 | 2 |
| 2048 | 2 |
| 1024 | 2 |
| 512 | 2 |
| 256 | 2 |
| 128 | 2 |
| 64 | 2 |
| 32 | 2 |
| 16 | 2 |
| 8 | 2 |
| 4 | 2 |
| 2 | 2 |
| 1 | |

Assim, podemos escrever:

$$8192 = 2^{13}$$

Os divisores do número 8192 serão todos os números que podem ser formados pelos fatores de 8192. Os números pertencem à sequência:

$$(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{13})$$

Note que a sequência é uma PG de razão $q = 2$.

Vamos usar a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$2^0$ até $2^{13}$ são 14 números, logo $n = 14$.

$q = 2$ e $a_1 = 2^0 = 1$.

Substituindo os valores:

$$S_{14} = \frac{1(2^{14} - 1)}{2 - 1} = 2^{14} - 1$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S = 2^{14} - 1}$

**17.** Simplifique:

$$\frac{(x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n})}{(x + x^2 + \cdots + x^n)}$$

**Resolução:**

Temos uma soma de PG finita no numerador e no denominador da fração.

Vamos primeiro simplificar o numerado usando a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Para a sequência $x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$, a razão é $q = \frac{x^4}{x^2} = x^2$ e $a_1 = x^2$.

Vamos encontrar o número de termos dessa PG:

$$a_m = a_1 q^{m-1}$$
$$a_m = x^{2n}$$
$$x^{2n} = x^2(x^2)^{m-1}$$
$$x^{2n-2} = (x^2)^{m-1}$$
$$(x^2)^{n-1} = (x^2)^{m-1}$$
$$m = n$$

Logo, a quantidade de termos dessa PG é $n$.

Podemos escrever:

$$S_n = \frac{x^2((x^2)^n - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^n - 1)(x^n + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Usando o mesmo raciocínio para o denominador:

$x + x^2 + \cdots + x^n$ possui $n$ termos e sua razão é $q = x$.

$$s_n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

A fração que temos que simplificar é dado por:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{\frac{x^2(x^n-1)(x^n+1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{x(x^n-1)}{x-1}} = \frac{x(x^n+1)}{x+1}$$

**Gabarito:** $\frac{x(x^n+1)}{x+1}$

**18.** Calcule a soma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

**Resolução:**

Veja:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

Essa é uma soma de duas progressões geométricas infinitas:

$$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ ½$$

$$S'' = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ 1/3$$

Usando a fórmula da soma da PG infinita para cada sequência, temos:

$$S' = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$S'' = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, a soma da questão é dada por:

$$S = S' + S'' = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Gabarito:** $S = 3/2$

# 4. Progressão Aritmética Geométrica (PAG)

Entre as sequências, podemos ter uma que é a união de uma PA com uma PG. Essa sequência chama-se progressão aritmética geométrica.

**Definição:**

O termo geral de uma PAG é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}}}$$

Exemplos:

1) $\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{5}{16}, \dots\right)$

Perceba que o numerador é uma PA de razão 1 $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ e o denominador é uma PG de razão 2 $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$. Essa sequência é uma PAG.

Para a PAG, a razão $r$ é igual a 1 e a razão $q$ é igual a $1/2$.

O termo geral é:

$$a_n = [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$$

$$a_n = [1 + (n-1)1]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^{n-1}} = n2^{1-n}$$

As questões que podem cair na prova sobre PAG normalmente cobrarão a soma dos termos da PAG. Vamos aprender a resolver esse tipo de questão.

Considere o termo inicial da PAG $a_1 = a$ e razões $r$ e $q$.

Vamos calcular:

$$S = a + [(a + r)q] + [(a + 2r)q^2] + [(a + 3r)q^3] + \cdots$$

O bizu dessa questão é multiplicar $S$ por $q$ e fazer $S - Sq$. Veja:

$$Sq = aq + [(a + r)q^2] + [(a + 2r)q^3] + [(a + 3r)q^4] + \cdots$$

Fazendo $S - Sq$:

$$S - Sq = a + [(a+r)q] + [(a+2r)q^2] + [(a+3r)q^3] + \cdots$$
$$-\{aq + [(a+r)q^2] + [(a+2r)q^3] + [(a+3r)q^4] + \cdots\}$$

Repare que os termos com as cores correspondentes podem ser subtraídos. Dessa forma, obtemos:

$$S(1-q) = a + rq + rq^2 + rq^3 + rq^4 + \cdots$$
$$S = \frac{a + rq(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)}{1-q}$$

Se $-1 < q < 1$, podemos aplicar a fórmula da PG infinita em $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$:

$$S = \frac{a + rq\left(\frac{1}{1-q}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$$

Encontramos uma fórmula para a soma de uma PAG de razão $-1 < q < 1$.

**19. (ITA/1975/Modificada)** Calcule $S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$

**Resolução:**

A questão é antiga, mas não se iluda! O ITA já cobrou questões antigas em provas recentes e a questão foi exatamente a mesma. Então vamos aprender a resolvê-la.

Perceba que a soma $S$ é de uma PAG com razão $r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

Vamos usar o bizu para a resolução da soma da PAG.

Multiplicando $S$ por $q = \frac{1}{2}$:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots$$

Comparando com $S$:

$$S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$$

Fazendo $S - S/2$:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots\right)$$

Note que os termos coloridos podem ser subtraídos. Assim, encontramos uma sequência conhecida:

$$\frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Obtemos a soma de uma PG de razão $1/2$.

Como a razão é maior que $-1$ e menor que 1, podemos usar a fórmula da PG infinita:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S = 4$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S = 4}$

**20. (ITA/1977/Modificada)** Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (k+1)x^k$, onde $x > 1$ e $k$ é um inteiro maior que $2$, então, se $n$ é um inteiro maior que $2$. Obtenha $S_n, n \in \mathbb{N}, n > 2$.

**Resolução:**

Vamos usar o bizu e calcular $S_n$.

Temos as razões $r = 1$ e $q = x$.

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$$

Multiplicando $S_n$ por $q = x$:

$$S_n x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (n+1)x^{n+1}$$

Subtraindo as duas equações:

$$S_n - S_n x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

Aplicando a soma da PG finita para a soma $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (perceba que temos $n = 1$ termos nessa sequência):

$$S_n(1 - x) = \frac{1(x^{n+1} - 1)}{x - 1} - (n+1)x^{n+1}$$

Multiplicando por $-1$:

$$S_n(x - 1) = (n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Isolando o termo $S_n$:

$$S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x - 1} - \frac{(x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}}$

# 5. Série Telescópica

Série telescópica é qualquer somatório da forma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(1)$$

Das várias séries telescópicas, estudaremos a série telescópica-aritmética.

Vamos aprender a resolvê-la.

Considere uma sequência da forma:

$$\left(\frac{1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_2 a_3}, \frac{1}{a_3 a_4}, \frac{1}{a_4 a_5}, \dots\right)$$

$a_i, i \in \mathbb{N}$, é o termo de uma PA de primeira ordem de razão $r$.

A sua soma é dada por:

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_4 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

O bizu para resolver essa soma é escrever os termos da sequência dessa forma:

$$\boxed{\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)}$$

Veja:

Para $r \neq 0$, vamos escrever os termos da sequência como a diferença dos termos consecutivos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{r}{a_1 a_2}$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{r}{a_1 a_2}$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{r}{a_2 a_3}$$

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} = \frac{r}{a_3 a_4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{r}{a_{n-1} a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{a_n a_{n+1}}$$

Note que somando os termos, os termos coloridos se cancelarão. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = r\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Perceba que a expressão do lado esquerdo é a soma telescópica. Logo, podemos escrever:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Também podemos escrever:

$$\boxed{\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}}$$

**Demonstração:**

$$\frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$\frac{Aa_{n+1} + Ba_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

Da igualdade das frações:

$$Aa_{n+1} + Ba_n = 1$$

Como $a_{n+1}$ é um termo de uma PA de razão $r$:

$$A(a_n + r) + Ba_n = 1$$

$$(A + B)a_n + Ar = 1$$

$Ar$ é uma constante e $a_n$ é um termo que possui valor dependente de $n$.

Para encontrar a solução dessa equação, devemos ter:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$Ar = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{r} \Rightarrow B = -\frac{1}{r}$$

Assim, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

**21.** **(IME/1996)** Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

**Resolução:**

Essa expressão é uma soma telescópica. Apesar da questão ser antiga, pode ser que ela seja cobrada no seu vestibular. O IME adora questões que exigem que o aluno já tenha visto algo parecido durante sua preparação.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar $A$ e $B$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{A}{1}+\frac{B}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}=A+\frac{B}{4}\Rightarrow A=\frac{1-B}{4}\quad(I)$$

$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\Rightarrow\frac{1}{28}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\quad(II)$$

Substituindo $(I)$ em $(II)$ para encontrar $B$:

$$\frac{1}{28}=\frac{\frac{1-B}{4}}{4}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{1-B}{16}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{(1-B)7+B\cdot 16}{16\cdot 7}$$

$$16\cdot\frac{7}{28}=(1-B)7+B\cdot 16$$

$$4=7-7B+16B$$

$$-3=9B$$

$$B=-\frac{1}{3}$$

Substituindo $B$ em $(I)$:

$$A=\frac{1-B}{4}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$$

Encontramos $A = 1/3$ e $B = -1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} - \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de $S$:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998 \cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2995} - \frac{1}{2998}\right) + \left(\frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{2995}} - \cancel{\frac{1}{2998}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2998}} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3001}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r = 3$, $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3001}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S = \frac{1000}{3001}}$

**22.** **(IME/1966)** Calcule:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

**Resolução:**

Perceba que os termos possuem a forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

$a_n$ é o termo de uma PA de primeira ordem de razão $r = 2$.

Vamos reescrever os termos usando o bizu:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{A}{a_n a_{n+1}} + \frac{B}{a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{A(a_{n+2}) + B(a_n)}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$A(a_{n+2}) + B(a_n) = 1$$

Escrevendo $a_{n+2} = a_n + 2r$:

$$A(a_n + 2r) + B(a_n) = 1$$

$$(A + B)a_n + 2Ar = 1$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$2Ar = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2r} \Rightarrow B = -\frac{1}{2r}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$$

Reescrevendo a soma usando essa forma e substituindo $r = 2$:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$S = \frac{1}{2 \cdot 2}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5}\right) + \frac{1}{2 \cdot 2}\left(\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 7}\right) + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2}\left(\frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} - \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

**Gabarito:** $S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$

# 6. Lista de Questões

## 6.1. Lista de Fixação

**23. (EEAR/2018)**

O 6° termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

**24. (EEAR/2018)**

Os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = (-1)^n \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, são tais que

a) formam uma PA de razão 4

b) formam uma PG de razão 2

c) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

d) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

**25. (EEAR/2018)**

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ de razão $q = 2$. Se $a_1 + a_5 = 272$, o valor de $a_1$ é

a) 8

b) 6

c) 18

d) 16

**26. (EEAR/2017)**

Considere esses quatro valores $x, y, 3x, 2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

**27. (EEAR/2017)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ uma PG de termos não nulos. Se $2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5$, pode-se afirmar corretamente que a razão dessa PG é

a) 4

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}$

**28. (EEAR/2016)**

A progressão aritmética, cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = 5n - 18$, tem razão igual a

a) $-5$

b) $-8$

c) 5

d) 8

**29. (EEAR/2016)**

Quatro números estão dispostos de forma tal que constituem uma PG finita. O terceiro termo é igual a 50 e a razão é igual a 5. Desta maneira, o produto de $a_1 \cdot a_4$ vale

a) 10

b) 250

c) 500

d) 1250

**30. (EEAR/2015)**

Quatro números estão em PA de razão 3. Se o primeiro termo somado ao último é igual a 19, então o primeiro termo é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

**31. (EEAR/2015)**

Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3 + a_7 = 5$. Assim, a razão dessa PA é

a) $0,5$.

b) $2,5$.

c) 2.

d) 1.

**32. (EEAR/2015)**

Em uma Progressão Geométrica, o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{2}$. A soma dos 7 primeiros termos dessa PG é

a) $\frac{127}{64}$

b) $\frac{97}{64}$

c) $\frac{63}{32}$

d) $\frac{57}{32}$

**33. (EEAR/2014)**

Em uma PG de razão 6, o quarto termo é 48. Assim, o primeiro termo é

a) 2

b) 3

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{9}$

**34. (EEAR/2013)**

Na PA decrescente $(18, 15, 12, 9, \dots)$, o termo igual a $-51$ ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

**35. (EEAR/2012)**

Se a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG de termos não nulos, então $x^2$ é

a) 1.

b) 4.

c) 9.

d) 16.

**36. (EEAR/2011)**

Sejam as sequências $S_1 = (1, 5, 25, 125, \dots)$ e $S_2 = (4, 7, 10, 13, \dots)$. A razão entre o $6°$ termo de $S_1$ e o $8°$ de $S_2$ é

a) 150.

b) 125.

c) 100.

d) 75.

**37. (EEAR/2010)**

Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25.

b) 30.

c) 33.

d) 42.

**38. (EEAR/2009)**

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

a) 7.

b) 5.

c) 4.

d) 2.

**39. (EEAR/2009)**

Se a soma dos $n$ primeiros termos de uma P.A. é $3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então a razão dessa P.A. é

a) 6.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

**40. (EEAR/2009)**

O $4°$ termo de uma P.G. é $-80$, e o $6°$ termo é $-320$. Se essa P.G. é alternante, então sua razão é

a) 4.

b) 3.

c) $-1$.

d) $-2$.

**41. (EEAR/2008)**

A soma dos $n$ primeiros termos da PG $(1, -2, 4, -8, \dots)$ é $-85$. Logo, $n$ é

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

## 6.2. Lista de Aprofundamento

**42. (ITA/2020)**

Sejam $a, b$ e $c$ números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se $a, b$ e $c$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $k$, então o produto $P$ e a soma $S$ de todos os possíveis valores para $k$ são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

**43. (ITA/2020)**

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

**44. (ITA/2019/Modificada)**

Classifique a afirmação:

Se $a, b$ e $c$ são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

**45. (ITA/2017)**

Sejam $A = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de $1$ a $30$ e $(a_1, a_2, a_3)$ uma progressão geométrica crescente com elementos de $A$ e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas $(a_1, a_2, a_3)$ de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreve $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $mdc(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para $n$.

**46. (ITA/2017)**

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que $a, b, c, d$ formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) $-140$

b) $-120$

c) $0$

d) $120$

e) $140$

**47. (ITA/2015)**

Sabe-se que $1, B, C, D$ e $E$ são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. $B, C, D, E$ são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C$, e os números $1, C, E$, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números $B, C, D, E$, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine $B, C, D, E$.

**48. (ITA/2015)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}$, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. $a_7$ é um número primo.

III. Se $n$ é múltiplo de $3$, então $a_n$ é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

**49. (ITA/2012)**

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a $-127$. Então, o produto $xyz$ é igual a

a) $-60$

b) $-30$

c) $0$

d) $30$

e) $60$

**50. (ITA/2010)**

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma $8$ e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma $2$. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

**51. (ITA/2010)**

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão $d$.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

**52. (ITA/2007)**

Seja $k$ um número inteiro positivo e

$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k \; e \; mdc(j,k) = 1\}$.

Verifique se $n(A_3), n(A_9), n(A_{27})$ e $n(A_{81})$ estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

**53. (ITA/2007)**

Se $A, B$ e $C$ forem conjuntos tais que $n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10, n(B \cap C)$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem.

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.

b) formam uma progressão aritmética de razão 2.

c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

e) não formam uma progressão aritmética.

**54. (ITA/2006)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva $r$, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

**55. (ITA/2005)**

Seja $a_1, a_2, \dots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \; para \; n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

**56. (ITA/2003)**

Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V a.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes $v_A$ e $v_T$, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3$, ... que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3$, ..., respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, $d_n$ denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k$$

da corrida.

Verifique que os termos $t_k, k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

**57. (ITA/2002)**

Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e responda, justificando:

Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

**58. (ITA/2000)**

O valor de $n$ que torna a sequência

$$2 + 3n, -5n, 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) $[-2, -1]$.

b) $[-1, 0]$.

c) $[0, 1]$.

d) $[1, 2]$.

e) $[2, 3]$.

**59. (ITA/1998)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1, 0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $8/27$

b) $20/27$

c) $26/27$

d) $30/27$

e) $38/27$

**60. (ITA/1995)**

Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0{,}3: 0{,}03: 0{,}003: \dots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

a) $1/3$

b) $2/3$

c) $1$

d) $2$

e) $1/2$

**61. (ITA/1994)**

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a $2^{25}$ e o termo do meio é $2^5$. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$

b) $a_1 + q = 12$

c) $a_1 + q = 10$

d) $a_1 + q + n = 20$

e) $a_1 + q + n = 11$

**62. (IME/2019)**

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

**63. (IME/2019)**

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é

a) $-1$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

**64. (IME/2017)**

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ de termos inteiros, de razão $r$ e razão $q$, respectivamente, onde $r$ e $q$ são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de $b_1$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

**65. (IME/2016)**

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos $a_1, a_2$ e $a_{10}$ estão em PG, assim como $a_6, a_j$ e $a_{25}$. Determine $j$.

**66. (IME/2015)**

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

**67. (IME/2014)**

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

**68. (IME/2014)**

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é $S_1$ e a soma de seus quadrados é $S_2$. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) $1$

**69. (IME/2013)**

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão $r$ e $q$, respectivamente, onde $r$ e $q$ são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12

b) 48

c) 66

d) 99

e) 129

**70. (IME/2012)**

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão $r$, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão $q$, com $q\ e\ r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão $r$;

b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

**71. (IME/2010)**

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de $S$ satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

**72. (IME/2010)**

A quantidade $k$ de números naturais positivos, menores do que $1000$, que não são divisíveis por $6$ ou $8$, satisfaz a condição:

a) $k < 720$

b) $720 \leq k < 750$

c) $750 \leq k < 780$

d) $780 \leq k < 810$

e) $k \geq 810$

**73. (IME/2000)**

Determine o polinômio em $n$, com no máximo $4$ termos, que representa o somatório dos quadrados dos $n$ primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

**74. (IME/1996)**

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998 \cdot 3001}$$

# 7. Gabarito

23. c
24. d
25. d

26. b
27. b
28. c
29. c
30. c
31. a
32. a
33. d
34. c
35. b
36. b
37. b
38. b
39. a
40. d
41. a
42. d
43. c
44. Verdadeira.
45. a) $(4,6,9),(8,12,18)\ e\ (12,18,27)$ b) $n=4$
46. d
47. $B=\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{2}, D=1, E=-2$
48. d
49. $xyz=-60$
50. $S=14-6\sqrt{2}$
51. d
52. Progressão geométrica de razão 3.
53. d
54. $a+r=11$
55. $r=\frac{2\pi}{3}$ e $a_1=\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}$
56. $S=\frac{d_1}{v_A-v_T}$ e S é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.
57. $\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2>\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2, \forall n\in\mathbb{N}$
58. b
59. e
60. c
61. e
62. 5 termos
63. d
64. a
65. $j=12$
66. a
67. $\underbrace{333\ldots3}_{30\ algs}$

68. b
69. c
70. a) $r = 3$ b) $a_{18} = 53$
71. c
72. c
73. $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
74. $S = \frac{1000}{3001}$

# 8. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

## 8.1. Lista de Fixação

**23. (EEAR/2018)**

O 6° termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

**Comentários**

Analisando-se a sequência, podemos ver que temos uma PG de razão 4:

$$(2, 8, 32, 128, \dots) = (2, 2 \cdot 4, 2 \cdot 4 \cdot 4, 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4, \dots)$$

Como o primeiro termo é 2, temos como termo geral:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$$

Logo:

$$a_6 = 2 \cdot 4^{6-1} = 2 \cdot 4^5 = 2048$$

A soma dos algarismos é $2 + 0 + 4 + 8 = 14$.

**Gabarito: "c".**

---

**24. (EEAR/2018)**

Os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = (-1)^n \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, são tais que

a) formam uma PA de razão 4

b) formam uma PG de razão 2

c) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

d) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

**Comentários**

Calculando os quatro primeiros termos da sequência:

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 + 1 = 0$$
$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 + 1 = 3$$
$$a_3 = (-1)^3 \cdot 3 + 1 = -2$$
$$a_4 = (-1)^4 \cdot 4 + 1 = 5$$

Assim, note que $a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3$ e $a_3 + a_4 = -2 + 5 = 3$. Logo:

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4$$

**Gabarito: "d".**

---

**25. (EEAR/2018)**

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ de razão $q = 2$. Se $a_1 + a_5 = 272$, o valor de $a_1$ é

a) 8

b) 6

c) 18

d) 16

**Comentários**

Podemos escrever $a_5$ em função de $a_1$:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot 2^4 = 16a_1$$

Substituindo na equação:

$$a_1 + 16a_1 = 272 \Rightarrow 17a_1 = 272 \Rightarrow a_1 = \frac{272}{17} = 16$$

**Gabarito: "d".**

---

**26. (EEAR/2017)**

Considere esses quatro valores $x, y, 3x, 2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

**Comentários**

Da soma dos extremos, temos:

$$x + 2y = 20 \ \ (I)$$

Como $(x, y, 3x, 2y)$ formam uma PA crescente, temos da propriedade da média aritmética:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow y = \frac{x + 3x}{2} = \frac{4x}{2} = 2x$$

Substituindo $y$ em $(I)$:

$$x + 2(2x) = 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

O terceiro termo é $a_3 = 3x = 3 \cdot 4 = 12$.

**Gabarito: "b".**

---

**27. (EEAR/2017)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ uma PG de termos não nulos. Se $2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5$, pode-se afirmar corretamente que a razão dessa PG é

a) 4

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}$

**Comentários**

Reescrevendo os termos da PG na equação, temos:

$$2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5 \Rightarrow 2(a_1 q + a_1 q^3) = a_1 q^2 + a_1 q^4$$
$$\Rightarrow 2a_1 q(1 + q^2) = a_1 q(q + q^3)$$

Sendo os termos da PG não nulos, temos $a_1 q \neq 0$, logo:

$$2(1 + q^2) = q + q^3 \Rightarrow 2(1 + q^2) - q(1 + q^2) = 0 \Rightarrow (2 - q)(1 + q^2) = 0$$

Para $q \in \mathbb{R}$, a única solução para a equação ocorre para $2 - q = 0$, logo:

$$q = 2$$

**Gabarito: "b".**

---

**28. (EEAR/2016)**

A progressão aritmética, cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = 5n - 18$, tem razão igual a

a) $-5$

b) $-8$

c) 5

d) 8

**Comentários**

Para esse tipo de questão, devemos encontrar os termos iniciais:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 18 = -13$$
$$a_2 = 5 \cdot 2 - 18 = -8$$
$$a_3 = 5 \cdot 3 - 18 = -3$$
$$\vdots$$

Perceba que a cada termo adicionamos 5, portanto, a razão é $r = 5$.

**Gabarito: "c".**

---

**29. (EEAR/2016)**

Quatro números estão dispostos de forma tal que constituem uma PG finita. O terceiro termo é igual a 50 e a razão é igual a 5. Desta maneira, o produto de $a_1 \cdot a_4$ vale

a) 10

b) 250

c) 500

d) 1250

**Comentários**

Do enunciado temos $a_3 = 50$ e $q = 5$. Assim, a PG é dada por:

$$(a_1, a_2, 50, a_4)$$

$$a_4 = a_3 q = 50 \cdot 5 = 250$$

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{50}{5} = 10$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow (2, 10, 50, 250)$$

$$\therefore a_1 \cdot a_4 = 2 \cdot 250 = 500$$

**Gabarito: "c".**

---

**30. (EEAR/2015)**

Quatro números estão em PA de razão 3. Se o primeiro termo somado ao último é igual a 19, então o primeiro termo é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

**Comentários**

Para quatro números em PA de razão 3, temos:

$$(a, a + 3, a + 6, a + 9)$$

A soma do primeiro termo com o último é 19, logo:

$$a + (a + 9) = 19 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

**Gabarito: "c".**

---

**31. (EEAR/2015)**

Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3 + a_7 = 5$. Assim, a razão dessa PA é

a) $0{,}5$.

b) $2{,}5$.

c) 2.

d) 1.

**Comentários**

Seja $a_1 = r = x$, assim, temos:

$$a_3 + a_7 = 5 \Rightarrow (a_1 + 2r) + (a_1 + 6r) = 5 \Rightarrow (x + 2x) + (x + 6x) = 5 \Rightarrow 10x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore r = 0{,}5$$

**Gabarito: "a".**

---

**32. (EEAR/2015)**

Em uma Progressão Geométrica, o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{2}$. A soma dos 7 primeiros termos dessa PG é

a) $\frac{127}{64}$

b) $\frac{97}{64}$

c) $\frac{63}{32}$

d) $\frac{57}{32}$

**Comentários**

Aplicando-se a fórmula da soma da PG finita, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{128} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 - 128}{128}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{127}{128} \cdot (-2) = \frac{127}{64}$$

**Gabarito: "a".**

---

**33. (EEAR/2014)**

Em uma PG de razão 6, o quarto termo é 48. Assim, o primeiro termo é

a) 2

b) 3

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{9}$

**Comentários**

Temos uma PG de razão $q = 6$ e $a_4 = 48$, logo:

$$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow 48 = a_1 \cdot 6^3 \Rightarrow 48 = 6 \cdot 36 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{48}{6 \cdot 36} = \frac{2}{9}$$

**Gabarito: "d".**

---

**34. (EEAR/2013)**

Na PA decrescente $(18, 15, 12, 9, \dots)$, o termo igual a $-51$ ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

**Comentários**

Nessa PA, o primeiro termo é $a_1 = 18$ e sua razão é $r = -3$, assim, seu termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 18 + (n-1)(-3)$$

O termo igual a $-51$ é:

$$-51 = 18 + (n-1)(-3) \Rightarrow -51 - 18 = -3n + 3 \Rightarrow -69 - 3 = -3n \Rightarrow -72 = -3n$$

$$\Rightarrow n = \frac{72}{3} = 24$$

**Gabarito: "c".**

---

**35. (EEAR/2012)**

Se a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG de termos não nulos, então $x^2$ é

a) 1.

b) 4.

c) 9.

d) 16.

**Comentários**

Sendo a sequência uma PG de termos não nulos, podemos escrever pela propriedade da média geométrica:

$$(3x+2)^2 = x \cdot (10x + 12)$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 10x^2 + 12x$$

$$0 = 10x^2 - 9x^2 + 12x - 12x - 4$$

$$x^2 - 4 = 0 \therefore x^2 = 4$$

**Gabarito: "b".**

---

**36. (EEAR/2011)**

Sejam as sequências $S_1 = (1, 5, 25, 125, \dots)$ e $S_2 = (4, 7, 10, 13, \dots)$. A razão entre o $6°$ termo de $S_1$ e o $8°$ de $S_2$ é

a) 150.

b) 125.

c) 100.

d) 75.

**Comentários**

Perceba que $S_1$ é uma PG cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e razão é $q = 5$. $S_2$ é uma PA com primeiro termo $b_1 = 4$ e razão $r = 3$. Assim, o $6°$ termo de $S_1$ e o $8°$ termo de $S_2$ é:

$$S_1 \to a_6 = a_1 q^5 = 1 \cdot 5^5 = 5^5$$

$$S_2 \to b_8 = b_1 + 7r = 4 + 7 \cdot 3 = 25 = 5^2$$

Portanto:

$$\frac{a_6}{b_8} = \frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3 = 125$$

**Gabarito: "b".**

---

**37. (EEAR/2010)**

Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25.

b) 30.

c) 33.

d) 42.

**Comentários**

Vamos inserir nove meios aritméticos entre 15 e 45:

$$\left(15, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}_{9\ termos}, 45\right)$$

Calculando a razão da PA:

$$a_{11} = 45 \Rightarrow a_1 + 10r = 45 \Rightarrow 15 + 10r = 45 \Rightarrow 10r = 30 \Rightarrow r = 3$$

Assim, o sexto termo é:

$$a_6 = a_1 + 5r = 15 + 5 \cdot 3 = 30$$

**Gabarito: "b".**

---

**38. (EEAR/2009)**

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

a) 7.

b) 5.

c) 4.

d) 2.

**Comentários**

$$PG\ crescente \rightarrow (a, aq, aq^2, aq^3)$$

Do enunciado:

$$a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow a + aq = 12 \Rightarrow a(1+q) = 12$$

$$a_3 + a_4 = 300 \Rightarrow aq^2 + aq^3 = 300 \Rightarrow q^2 a(1+q) = 300 \Rightarrow q^2 \cdot 12 = 300 \Rightarrow q^2 = 25$$

$$\Rightarrow q = \pm 5$$

$$PG\ crescente \rightarrow q = 5$$

**Gabarito: "b".**

---

**39. (EEAR/2009)**

Se a soma dos $n$ primeiros termos de uma P.A. é $3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então a razão dessa P.A. é

a) 6.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

**Comentários**

Do enunciado, temos $S_n = 3n^2$. Para encontrar os termos da PA, devemos proceder do seguinte modo:

$$S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \Rightarrow a_2 = 12 - a_1 = 12 - 3 = 9$$

Assim, a razão é:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 9 - 3 = 6$$

**Gabarito: "a".**

---

**40. (EEAR/2009)**

O 4° termo de uma P.G. é $-80$, e o 6° termo é $-320$. Se essa P.G. é alternante, então sua razão é

a) 4.

b) 3.

c) $-1$.

d) $-2$.

**Comentários**

Uma PG é alternante quando a sua razão é negativa, portanto, temos $q < 0$. Do enunciado:

$$a_4 = -80$$

$$a_6 = -320$$

$$a_6 = a_4 q^2 \Rightarrow -320 = -80 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

Como $q < 0$, devemos ter $q = -2$.

**Gabarito: "d".**

---

**41. (EEAR/2008)**

A soma dos $n$ primeiros termos da PG $(1, -2, 4, -8, \dots)$ é $-85$. Logo, $n$ é

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

**Comentários**

A soma de uma PG finita é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Analisando a sequência, vemos que $q = -2$. Logo:

$$\frac{1 \cdot ((-2)^n - 1)}{(-2) - 1} = -85 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -85 \cdot (-3) \Rightarrow (-2)^n = 255 + 1 = 256 = (-2)^8$$

$$\Rightarrow (-2)^n = (-2)^8 \therefore n = 8$$

**Gabarito: "a".**

---

## 8.2. Lista de Aprofundamento

**42. (ITA/2020)**

Sejam $a, b$ e $c$ números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se $a, b$ e $c$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $k$, então o produto $P$ e a soma $S$ de todos os possíveis valores para $k$ são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

**Comentários**

Vamos reescrever a sequência $(a, b, c)$ como $\left(\frac{b}{k}, \text{b}, bk\right)$ para simplificar as contas.

Assim, a partir do enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 + b^2 = (bk)^2$$

$$\frac{b^2}{k^2} + b^2 = b^2k^2$$

$$b^2k^2 - b^2 - \frac{b^2}{k^2} = 0$$

Como $a \neq 0$, implica que $b \neq 0$, dessa forma, temos:

$$k^2 - 1 - \frac{1}{k^2} = 0$$

$$k^4 - k^2 - 1 = 0$$

Façamos $y = k^2$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

ou

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Como $k$ é um número real, temos que não existe $k^2 < 0$. Logo:

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Assim,

$$P = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) = 0$$

**Gabarito: “d”.**

**43. (ITA/2020)**

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

**Comentários**

Veja que a quantidade de velas gastas a cada aniversário pode ser vista como uma progressão aritmética de razão 1.

| Aniversário | Velas gastas |
|---|---|
| 1º | 1 |
| 2º | 2 |
| 3º | 3 |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$º | $n$ |

Assim, o total de velas gastas até o n-ésimo aniversário é:

$$V_T = \frac{(1+n)n}{2}$$

Como todo ano um novo pacote de 12 velas é compradas, temos até o n-ésimo aniversário:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} \text{ velas remanescentes}$$

O primeiro ano em que as velas serão insuficientes ocorrerá quando as velas remanescentes satisfazerem a condição:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} < 0 \Rightarrow 12n < \frac{(1+n)n}{2}$$

Sendo $n$ a idade, temos que $n \neq 0$, logo:

$$12 < \frac{1+n}{2} \Rightarrow 24 < 1 + n \Rightarrow 23 < n \therefore n > 23$$

O menor inteiro que satisfaz essa condição é $n = 24$.

**Gabarito: “c”.**

**44. (ITA/2019/Modificada)**

Classifique a afirmação:

Se $a, b$ e $c$ são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

**Comentários**

Se a, b e c formam, nessa ordem, uma PA então podemos escrever:

$$b = a + r$$

$$c = a + 2r$$

Veja que:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-r} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$$

Analogamente:

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-r} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}$$

Então para a sequência $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formar uma PA nessa ordem, devemos ter:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

Vamos tentar encontrar essa relação.

Calculando $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}\right) = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{r}$$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{c}+\sqrt{a}$:

$$\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{r}\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Da condição $(a, b, c)$ ser uma PA:

$$c = a + 2r \Rightarrow c - a = 2r$$

Substituindo $c = 2r$ na equação $\frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$:

$$\frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2r}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

∴Verdadeira.

**Gabarito: Verdadeira.**

---

**45. (ITA/2017)**

Sejam $A=\{1,2,\dots,29,30\}$ o conjunto dos números inteiros de $1$ a $30$ e $(a_1,a_2,a_3)$ uma progressão geométrica crescente com elementos de $A$ e razão $q>1$.

a) Determine todas as progressões geométricas $(a_1,a_2,a_3)$ de razão $q=\frac{3}{2}$.

b) Escreve $q=\frac{m}{n}$, com $m,n\in\mathbb{Z}$ e $mdc(m,n)=1$. Determine o maior valor possível para $n$.

**Comentários**

a) Temos que encontrar todas as progressões geométricas da forma $(a_1,a_2,a_3)$ de razão $q=\frac{3}{2}$. Cada PG é formada pelos elementos de $A=\{1,2,\dots,30\}$.

Vamos escrever a PG em função do $a_1$ e de $q=3/2$:

$$(a_1,a_2,a_3)$$

$$(a_1,a_1q,a_1q^2)$$

$$\left(a_1,a_1\left(\frac{3}{2}\right),a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(a_1,\frac{3a_1}{2},\frac{9a_1}{4}\right)$$

Os elementos da PG são elementos de $A$, um conjunto de números inteiros de 1 a 30.

Assim, $a_1,\frac{3a_1}{2},\frac{9a_1}{4}$ devem ser números inteiros e o último termo da PG deve ser menor ou igual a 30, pois este é o maior número elemento de $A$:

$$\frac{9a_1}{4}\leq 30$$

Disso, encontramos que $a_1$ deve ser múltiplo de $4$, já que $\frac{9a_1}{4}$ deve ser inteiro.

Vamos encontrar as sequências:

$$a_1=4$$

$$a_2=a_1\left(\frac{3}{2}\right)=4\left(\frac{3}{2}\right)=6$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right) = 9$$

$(4, 6, 9)$ é a primeira PG

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 8\left(\frac{3}{2}\right) = 12$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{9}{4}\right) = 18$$

$(8, 12, 18)$ é a segunda PG

$$a_1 = 12$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right) = 18$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12\left(\frac{9}{4}\right) = 27$$

$(12, 18, 27)$ é a terceira PG

$$a_1 = 16$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 16\left(\frac{3}{2}\right) = 24$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 16\left(\frac{9}{4}\right) = 36 > 30 \Rightarrow não\ satisfaz\ a\ condição$$

Portanto, temos apenas três progressões geométricas que satisfazem a condição:

$$(4, 6, 9), (8, 12, 18)\ e\ (12, 18, 27)$$

b) Se $mdc(m, n) = 1 \to m$ e $n$ são primos entre si. A PG pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_1, a_1 q, a_1 q^2)$$

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)$$

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

Como os termos dessa PG são elementos de $A$, um conjunto de inteiros:

$$a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right) deve\ ser\ inteiro \rightarrow a_1 \text{ é } múltiplo\ de\ n^2$$

Se $a_1$ é múltiplo de $n^2$ e $a_1 \in \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, então $a_1$ é múltiplo de um número quadrado perfeito (um número quadrado perfeito é da forma $x^2$, onde $x$ é um número inteiro).

Para $a_1$ pertencer ao conjunto $A$, $a_1 < 30$.

A questão pede o maior valor de $n$. Como $a_1$ é múltiplo de $n^2$, $a_1$ deve também possuir o maior valor possível.

O maior número quadrado perfeito que satisfaz essa condição é $a_1 = 25$

$$a_1 = 25 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$$

Como $q > 1$ e $m, n$ são primos, para o menor valor de $q$ que satisfaz essa condição, temos:

$$q = \frac{m}{n} = \frac{6}{5}$$

Para esse valor, encontramos a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(25, 25\left(\frac{6}{5}\right), 25\left(\frac{36}{25}\right)\right)$$

$$(25, 30, 36)$$

Perceba que o último termo dessa PG não é elemento de $A$. Então $n^2$ deve ser menor que 25. O próximo valor que satisfaz a condição é:

Para $a_1 = 16 \rightarrow n^2 = 16 \rightarrow n = 4$. Esses valores geram a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(16, 16\left(\frac{5}{4}\right), 16\left(\frac{25}{16}\right)\right)$$

$$(16, 20, 25)$$

Essa PG satisfaz todas as condições do problema.

$$\therefore n = 4$$

**Gabarito: a)** $\mathbf{(4, 6, 9), (8, 12, 18)}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{(12, 18, 27)}$ **b)** $\boldsymbol{n = 4}$

---

**46. (ITA/2017)**

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que $a, b, c, d$ formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) $-140$

b) $-120$

c) $0$

d) $120$

e) $140$

**Comentários**

Do enunciado, $(a, b, c, d)$ é PG:

$$b = aq$$
$$c = aq^2$$
$$d = aq^3$$

$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$ é PA:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$
$$\frac{b}{2} = \frac{a + \frac{c}{4}}{2}$$
$$b = a + \frac{c}{4}$$

Usando as informações da PG na PA, obtemos:

$$aq = a + \frac{aq^2}{4}$$
$$q = 1 + \frac{q^2}{4}$$
$$q^2 - 4q + 4 = 0$$

Fatorando:

$$(q - 2)^2 = 0$$

A solução para essa equação é: $q = 2$.

Substituindo $q = 2$ e representando $b, c, d$ em função de $a$:

$$b = aq = 2a$$
$$c = aq^2 = 4a$$
$$d = aq^3 = 8a$$

Das informações da PA, obtemos:

$$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$$
$$\left(a, \frac{2a}{2}, \frac{4a}{4}, 8a - 140\right)$$
$$(a, a, a, 8a - 140)$$

Repare nos termos dessa PA. Essa sequência é uma PA de razão $r = 0$, pois

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Então, podemos escrever:

$$a_4 = a$$
$$8a - 140 = a$$
$$7a = 140$$
$$a = 20$$

A questão pede $d - b$:

$$d - b = aq^3 - aq = 20(2)^3 - 20(2) = 160 - 40 = 120$$
$$\therefore d - b = 120$$

**Gabarito: “d”.**

---

**47. (ITA/2015)**

Sabe-se que $1, B, C, D$ e $E$ são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. $B, C, D, E$ são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C,$ e os números $1, C, E,$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números $B, C, D, E,$ estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine $B, C, D, E$.

**Comentários**

Vamos extrair as informações do enunciado.

Da afirmação II, temos:

$$(1, B, C) \text{ PA} \rightarrow B = 1 + r \text{ e } C = 1 + 2r$$
$$(1, C, E) \text{ PA} \rightarrow C = 1 + r' \text{ e } E = 1 + 2r'$$

Igualando os dois valores de $C$:

$$C = 1 + 2r = 1 + r' \rightarrow r' = 2r$$

Colocando $E$ em função de $r$:

$$E = 1 + 2r' = 1 + 4r$$

Então, encontramos:

$$B = 1 + r$$
$$C = 1 + 2r$$
$$E = 1 + 4r$$

Da III, $(B, C, D, E)$ estão em PG nesta ordem. Seja $q$ sua razão:

$$C = Bq$$

$$q = \frac{C}{B} = \frac{1+2r}{1+r}$$

Vamos escrever $E$ em função do primeiro termo $B$ e da razão $q$:

$$E = Bq^3 = (1+r)\left(\frac{1+2r}{1+r}\right)^3 = \frac{(1+2r)^3}{(1+r)^2}$$

Temos duas equações para $E$, vamos igualá-las:

$$E = 1 + 4r = \frac{(1+2r)^3}{(1+r)^2}$$

Desenvolvendo a equação e simplificando:

$$(1+4r)(1+r)^2 = (1+2r)^3$$

$$(1+4r)(1+2r+r^2) = 1 + 8r^3 + 3(1)^2(2r) + 3(1)(2r)^2$$

$$1 + 2r + r^2 + 4r + 8r^2 + 4r^3 = 1 + 8r^3 + 6r + 12r^2$$

$$1 + 6r + 9r^2 + 4r^3 = 1 + 6r + 12r^2 + 8r^3$$

$$8r^3 - 4r^3 + 12r^2 - 9r^2 + 6r - 6r + 1 - 1 = 0$$

$$4r^3 + 3r^2 = 0$$

$$r^2(4r+3) = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$r = 0 \text{ ou } 4r + 3 = 0$$

Da afirmação I, os termos são dois a dois distintos, logo $r \neq 0$.

$$4r + 3 = 0 \to r = -\frac{3}{4}$$

Vamos encontrar o valores dos números reais:

$$B = 1 + r = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$C = 1 + 2r = 1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$E = 1 + 4r = 1 + 4\left(-\frac{3}{4}\right) = -2$$

$$(B, C, D, E)\ PG \to q = \frac{1+2r}{1+r}$$

$$q = \frac{1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = -2$$

$$D = Cq = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 1$$

$$\therefore B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$$

**Gabarito:** $B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$

**48. (ITA/2015)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}$, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. $a_7$ é um número primo.

III. Se $n$ é múltiplo de $3$, então $a_n$ é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

**Comentários**

A sequência da questão é conhecida como sequência de Fibonacci. Vamos analisar as afirmações:

I. Pela definição da sequência, podemos escrever:

$$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p$$

Se $(a_p, a_{p+1}, a_{p+2})$ for uma PG de razão $q$, podemos escrever:

$$a_p q^2 = a_p q + a_p$$

$$q^2 = q + 1$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

Temos que resolver uma equação de segundo grau. Podemos encontrá-lo usando a fórmula:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da equação, temos $a = 1, b = -1, c = -1$:

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Encontramos uma razão irracional. Então, se multiplicarmos $a_p$ pela razão $q$, um número irracional, obteremos $a_{p+1}$, um número irracional. Pela definição da sequência de Fibonacci, seus

termos são a soma dos dois anteriores. A sequência é formada apenas por números inteiros positivos, logo é impossível ter números irracionais na sequência.

∴Falsa.

II. Vamos ver se $a_7$ é um número primo. A sequência de Fibonacci é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

$$a_7 = 13$$

13 é número primo

∴Verdadeira.

III. Vamos olhar a sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

Perceba que os termos com índices múltiplo de 3 são pares:

$$a_3 = 2, a_6 = 8, a_9 = 34$$

Os dois termos anteriores a estes números são ímpares.

Vamos provar por PIF a propriedade:

1) Já verificamos a sua validade para $a_3$.

2) Temos que generalizar o resultado.

Hipótese: $n = 3k \in \mathbb{N}, a_{3k}$ é par e $a_{3k-1}$ e $a_{3k-2}$ são ímpares.

Tese: $a_{3(k+1)}$ é par

Supondo a hipótese verdadeira, vamos tentar chegar à tese.

$$a_{3k+1} = a_{3k} + a_{3k-1}$$

$a_{3k-1}$ é ímpar e $3_{3k}$ é par $\rightarrow a_{3k+1}$ é ímpar

$$3_{3k+2} = a_{3k+1} + a_{3k}$$

$a_{3k+1}$ é ímpar e $a_{3k}$ é par $\rightarrow a_{3k+2}$ é ímpar

$$a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1}$$

$a_{3k+2}$ é ímpar e $a_{3k+1}$ é ímpar $\rightarrow a_{3k+3}$ é par

$a_{3k+3} = a_{3(k+1)}$ é par

Pela hipótese conseguimos provar que a tese também é verdadeira. Logo, está provada a propriedade.

∴Verdadeira.

Considere os números naturais $a, b, c$:

$c$ será par quando $a$ e $b$ forem ímpares ou $a$ e $b$ forem pares ao mesmo tempo.

Se $a$ for par e $b$ for ímpar, $c$ será ímpar. Veja:

$$a\ par \rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$$
$$b\ ímpar \rightarrow b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$
$$c = a + b = 2k + 2k' + 1$$
$$c = 2(k + k') + 1$$
$$k + k' = k'' \in \mathbb{N}$$
$$c = 2k'' + 1$$
$$c \text{ é } ímpar$$

O mesmo resultado é válido se $a$ for ímpar e $b$ for par.

Se $a$ for ímpar e $b$ for ímpar, c será par:

$$a\ ímpar \rightarrow a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$
$$b\ ímpar \rightarrow b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$
$$c = a + b = (2k + 1) + (2k' + 1)$$
$$c = 2k + 2k' + 2$$
$$c = 2(k + k' + 1)$$
$$k + k' + 1 = k'' \in \mathbb{N}$$
$$c = 2k''$$
$$c \text{ é } par$$

Se $a$ é par e $b$ é par, c será par:

$$a\ par \rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$$
$$b\ par \rightarrow b = 2k', k' \in \mathbb{N}$$
$$c = a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$$
$$k + k' = k''$$
$$c = 2k''$$
$$c \text{ é } par$$

**Gabarito: “d”.**

---

**49. (ITA/2012)**

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a $-127$. Então, o produto $xyz$ é igual a

a) $-60$

b) $-30$

c) $0$

d) $30$

e) $60$

**Comentários**

Temos uma PA cujos termos possuem as incógnitas $x, y$ e $z$. Pelas propriedades da PA, podemos escrever:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$3x - 5y = \frac{(x + 2y) + (8x - 2y)}{2}$$

$$3x - 5y = \frac{9x}{2}$$

$$6x - 10y = 9x$$

$$-10y = 3x$$

$$3x + 10y = 0 \;\; (I)$$

Também podemos escrever:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$8x - 2y = \frac{(3x - 5y) + (11x - 7y + 2z)}{2}$$

$$16x - 4y = 14x - 12y + 2z$$

$$2x + 8y - 2z = 0$$

$$x + 4y - z = 0 \;\; (II)$$

A questão afirma que o último termo é igual a $-127$:

$$11x - 7y + 2z = -127 \;\; (III)$$

Dessa forma, encontramos o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 10y = 0 \;\; (I) \\ x + 4y - z = 0 \;\; (II) \\ 11x - 7y + 2z = -127 \;\; (III) \end{cases}$$

(A resolução desse sistema será melhor entendida na aula de Sistemas Lineares.)

Vamos resolver esse sistema, somando $2 \cdot (II)$ e $(III)$, obtemos:

$$(2x + 11x) + (8y - 7y) + (2z - 2z) = -127$$

$$13x + y = -127 \;\; (IV)$$

Para encontrar $x$, podemos fazer $10 \cdot (IV) - (I)$:

$$10 \cdot (IV) = 130x + 10y = -1270$$

$$-(I) = -3x - 10y = 0$$

$$10 \cdot (IV) - (I) = 127x = -1270$$

$$x = -10$$

Substituindo $x = -10$ em $(I)$ para encontrar $y$:

$$3x + 10y = 0 \ \ (I)$$

$$3(-10) + 10y = 0$$

$$10y = 30$$

$$y = 3$$

Por fim, substituímos $x = -10$ e $y = 3$ em $(II)$ para encontrar $z$:

$$x + 4y - z = 0 \ \ (II)$$

$$z = x + 4y$$

$$z = (-10) + 4(3)$$

$$z = 2$$

$$xyz = (-10)(3)(2)$$

$$\therefore xyz = -60$$

**Gabarito: $xyz = -60$**

---

**50. (ITA/2010)**

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

**Comentários**

Questão sobre PG infinita de razão negativa. Ela nos dá o valor de dois somatórios. Sabemos que a soma de uma PG infinita é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$a_1$ é o primeiro termo da PG e $q$ é sua razão.

Vamos verificar o primeiro somatório dado na questão:

$$a_1 + a_6 + a_{11} + \cdots = 8$$

$(a_1, a_6, a_{11}, \dots)$ é uma PG. Precisamos descobrir a nova razão dessa PG para aplicar a fórmula.

Podemos escrever $a_6$ em função de $a_1$ e $r$:

$$a_6 = a_1 r^5$$

Sabemos que a forma de uma PG é a sequência $(a_1, a_1 r', a_1 r'^2, \dots)$

Então a razão da PG $(a_1, a_6, a_{11}, \dots)$ é $r' = r^5$.

A soma dessa PG é dada por:

$$S' = \frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

Para o segundo somatório temos:

$$a_5 + a_{10} + a_{15} + \cdots = 2$$

$$a_{10} = a_5 q^5 \Rightarrow r'' = r^5$$

$$S'' = \frac{a_5}{1 - r''}$$

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$S'' = \frac{a_1 q^4}{1 - r^5} = 2$$

Encontramos as seguintes equações:

$$(I)\ \frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

$$(II)\ \frac{a_1 r^4}{1 - r^5} = 2$$

Vamos dividir $(II)$ por $(I)$ para sumir o termo $a_1$:

$$\frac{(II)}{(I)} = \frac{\left(\frac{a_1 r^4}{1 - r^5}\right)}{\left(\frac{a_1}{1 - r^5}\right)} = \frac{2}{8}$$

$$r^4 = \frac{1}{4}$$

$$r^4 = \frac{1}{2^2}$$

Ainda estudaremos equações de potenciação nas próximas aulas. Por enquanto saiba que quando a incógnita está na forma $x^{2k}$, devemos considerar os valores positivos e negativos como soluções da equação. Pois se $x$ é solução de $x^{2k}$, $(-x)$ também será. Veja: $(x^k)(x^k) = (-x^k)(-x^k) = x^{2k}$.

$$r = \pm \frac{1}{2^{\frac{2}{4}}} = \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O enunciado afirma que $r < 0$. Então:

$$r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo $r$ em $(I)$ para encontrar $a_1$:

$$\frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

$$\frac{a_1}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5} = 8$$

$$\frac{a_1}{1+\frac{\sqrt{2}}{8}} = 8$$

$$a_1 = 8+\sqrt{2}$$

Essas operações serão explanadas na aula de Potênciação e Radiciação.

$$-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$$

Quando o termo está elevado a um número ímpar, podemos extrair o sinal negativo para fora da potência. Veja:

$$(-x)^{2k+1} = (-x)^{2k}(-x)^1 = x^{2k}(-1)x = (-1)x^{2k+1}$$

Dessa forma:

$$-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = -\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$$

Podemos simplificar desse modo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^5 = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^5} = \frac{2^2 2^{\frac{1}{2}}}{2^5} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{5-2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Sabemos o valor de $a_1$ e $r$. A soma pedida na questão é dado pela fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = \frac{(8+\sqrt{2})}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$S = \frac{(8+\sqrt{2})2}{2+\sqrt{2}} = \frac{16+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Vamos simplificar:

$$S = \frac{(16+2\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})}\frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = \frac{32-16\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}{4-2} = \frac{28-12\sqrt{2}}{2} = 14-6\sqrt{2}$$

$$\therefore S = 14-6\sqrt{2}$$

**Gabarito:** $S = 14-6\sqrt{2}$

---

**51. (ITA/2010)**

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão $d$.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

**Comentários**

Pelo enunciado, podemos extrair:

$$\mathrm{S}_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 10 + 25d$$

$$\mathrm{S}_{50} = \sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$$

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ é uma PA de razão $d$.

A soma de uma PA de razão $d$ é dado pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Aplicando a fórmula na primeira somatória:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = 10 + 25d$$

$$(a_1 + a_{10})5 = 10 + 25d$$

Simplificando:

$$a_1 + a_{10} = 2 + 5d$$

Podemos escrever $a_{10}$ em função de $a_1$ e $d$:

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

Substituindo $a_{10}$ na equação:

$$a_1 + (a_1 + 9d) = 2 + 5d$$

$$2a_1 = 2 - 4d$$

$$a_1 = 1 - 2d$$

Encontramos uma equação com $a_1$ e $d$. Vamos aplicar a fórmula para a segunda somatória e encontrar a outra equação:

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$$\frac{(a_1 + a_{50})50}{2} = 4550$$

$$(a_1 + a_{50})25 = 4550$$

$$(a_1 + a_{50}) = 182$$

Escrevendo $a_{50}$ em função de $a_1$ e $d$:

$$a_{50} = a_1 + 49d$$

Substituindo na equação e simplificando:

$$\left(a_1 + (a_1 + 49d)\right) = 182$$

$$2a_1 + 49d = 182$$

$$2a_1 = 182 - 49d$$

Temos agora duas equações:

$$(I)\ a_1 = 1 - 2d$$

$$(II)\ 2a_1 = 182 - 49d$$

Vamos encontrar o valor de $d$, substituindo $(I)$ em $(II)$:

$$2(1 - 2d) = 182 - 49d$$

$$2 - 4d = 182 - 49d$$

$$49d - 4d = 182 - 2$$

$$45d = 180$$

$$\Rightarrow d = 4$$

Substituindo $d = 4$ na $(I)$ para encontrar $a_1$:

$$a_1 = 1 - 2(4)$$

$$a_1 = 1 - 8 = -7$$

Encontramos o valor de $d$ e $a_1$, a questão pede $d - a_1$:

$$d - a_1 = 4 - (-7) = 11$$

**Gabarito: “d”.**

---

**52. (ITA/2007)**

Seja $k$ um número inteiro positivo e

$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k\ e\ mdc(j, k) = 1\}$.

Verifique se $n(A_3), n(A_9), n(A_{27})$ e $n(A_{81})$ estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

**Comentários**

Vamos traduzir os termos do enunciado.

Ele nos dá a definição de um conjunto:

$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k\ e\ mdc(j, k) = 1\}$

Esse conjunto está em função de $k$, e seus elementos são os números naturais $(j \in \mathbb{N})$ menores ou iguais a $k$ $(j \leq k)$ e $mdc(j,k) = 1$, isto é, $j$ e $k$ são primos entre si.

Vamos ao primeiro conjunto:

$$A_3 = \{j \in \mathbb{N}: j \leq 3 \ e \ mdc(j,3) = 1\}$$

Os elementos desse conjunto são os números naturais menores ou iguais a $3$ e estes números são primos em relação ao número $3$ $(mdc(j,3) = 1)$. Logo, os elementos não podem ser múltiplos de $3$. Os números naturais que satisfazem essa condição são: $1$ e $2$. Logo:

$$A_3 = \{1, 2\}$$

A questão pede para verificar a sequência $(n(A_3), n(A_9), n(A_{27}), n(A_{81}))$.

O número de elementos de $A_3$ é $n(A_3) = 2$.

Podemos continuar com o mesmo raciocínio e encontrar todos os elementos de cada conjunto. Mas a questão pede apenas o número de elementos desses conjuntos. Vamos economizar nosso tempo e encontrar um modo de calcular diretamente o número de elementos de cada conjunto.

Perceba que o número de elementos totais sem a restrição $mdc(j,k) = 1$ é $k$ (da definição $j \in \mathbb{N}, j \leq k$). Agora, impondo a restrição no conjunto, temos que remover os elementos não primos em relação a $k$. A sequência pedida possui $k$ potências de $3$ $(A_3, A_9, A_{27}, A_{81})$. Então os elementos que não satisfazem a condição $mdc(j,k) = 1$ são os números múltiplos de $3$ $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots)$

Vamos calcular o número de elementos de $A_9$. Os múltiplos de $k = 9$ são $3, 6, 9$, então o número de elementos de $A_9$ será $9 - 3$ ($9$ devido à $k = 9$ e $3$ devido aos múltiplos de $3$).

$$n(A_9) = 9 - 3 = 6$$

Note que a cada $3$ números naturais, devemos remover $1$ número $(\text{múltiplo de } 3)$. Então o número de elementos não primos pode ser dado pelo número $k/3$.

Usando esse raciocínio:

$$n(A_{27}) = 27 - \left(\frac{27}{3}\right) = 27 - 9 = 18$$

$$n(A_{81}) = 81 - \left(\frac{81}{3}\right) = 81 - 27 = 54$$

Dessa forma, encontramos a sequência:

$$(n(A_3), n(A_9), n(A_{27}), n(A_{81}))$$

$$(2, 6, 18, 54)$$

Essa sequência é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{6}{2} = 3$.

**Gabarito: Progressão geométrica de razão 3.**

---

**53. (ITA/2007)**

Se $A, B$ e $C$ forem conjuntos tais que $n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10, n(B \cap C)$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem.

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.

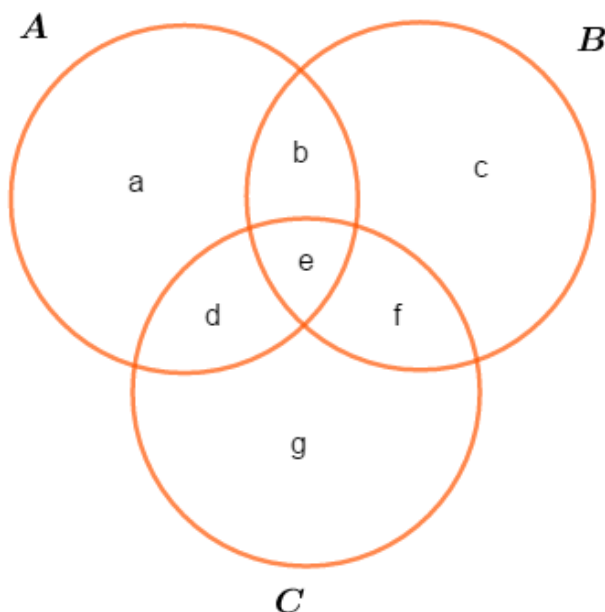
b) formam uma progressão aritmética de razão 2.

c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

e) não formam uma progressão aritmética.

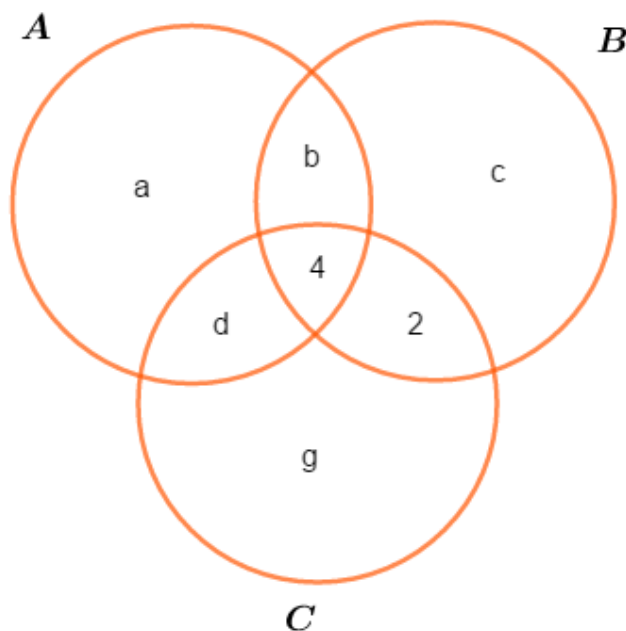
**Comentários**

Vamos resolver usando o Diagrama de Venn-Euler:

Nomeamos cada região do círculo com letras minúsculas.

Pelo enunciado, vamos descobrir os valores de cada região:

$$n(A \cap B \cap C) = 4 = e$$

$$n(B \cap C) = 6 = e + f \Rightarrow f = 2$$

Agora nosso diagrama fica assim:

Usando as outras informações, temos:

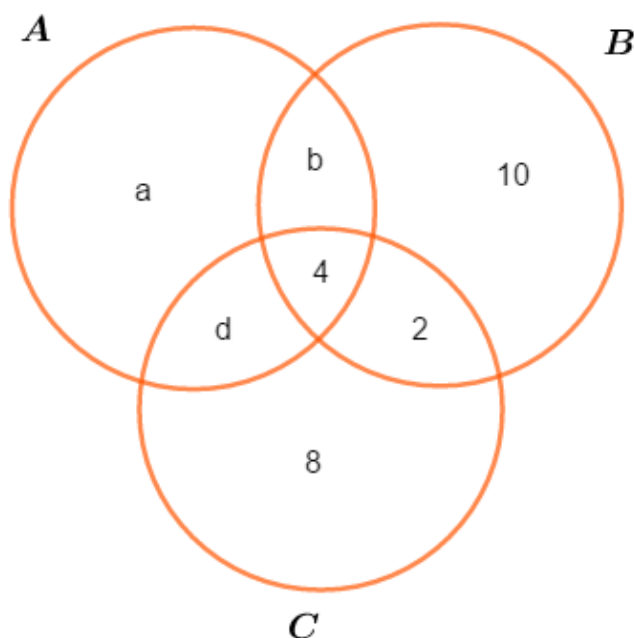
$$n(B - A) = 12$$

Veja que $n(B - A)$ é igual a $c + 2$ que é a região de elementos de $B$ menos os elementos de $A$.

$$n(B - A) = c + 2 = 12 \Rightarrow c = 10$$

Agora para $n(C - A) = 10$ usando o mesmo raciocínio:

$$g + 2 = 10 \Rightarrow g = 8$$

Atualizando nosso diagrama:

Falta usar $n(A \cup B) = 23$.

Pela figura:

$$n(A \cup B) = a + b + d + 4 + 10 + 2 = 23$$

Devemos encontrar os valores de $n(A), n(A \cup C)\ e\ n(A \cup B \cup C)$.

Note que $a + b + d + 4 = n(A)$. Assim, substituindo $n(A)$ na equação, conseguimos descobrir o valor de $n(A)$.

$$n(A) + 10 + 2 = 23$$

$$n(A) + 12 = 23$$

$$\Rightarrow n(A) = 11$$

Vamos encontrar $n(A \cup C)$. Usando o diagrama:

$$n(A \cup C) = a + b + d + 4 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 = n(A) + 10 = 11 + 10 = 21$$

$$\Rightarrow n(A \cup C) = 21$$

Agora o último termo:

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + d + 4 + 10 + 2 + 8$$

$$= (a + b + d + 4) + 10 + 2 + 8 = n(A) + 20 = 31$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 31$$

Dessa forma, encontramos a sequência:

$$\big(n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)\big)$$

$$(11, 21, 31)$$

Essa sequência é uma progressão aritmética de razão $10$ $(a_2 - a_1 = 21 - 11 = 10)$ e último termo $31$.

**Gabarito: "d".**

---

**54. (ITA/2006)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva $r$, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de $3$ é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

**Comentários**

Problema de PG infinita com razão $r$ e $a_1 = a$.

A questão nos dá a soma dos termos de índices pares e também a soma dos termos de índices múltiplos de 3. Desse modo:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = 4$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \cdots = \frac{16}{13}$$

Perceba que podemos definir $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ e $(a_3, a_6, a_9, \dots)$ como duas novas PG`s infinitas. Veja:

$$\begin{cases} a_4 = a_2 r^2 \\ a_6 = a_2 r^4 \\ a_8 = a_2 r^6 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^2\ e\ termo\ inicial\ a_2$$

$$\begin{cases} a_6 = a_3 r^3 \\ a_9 = a_3 r^6 \\ a_{12} = a_3 r^9 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^3\ e\ termo\ inicial\ a_3$$

Vamos usar a fórmula da soma de PG infinita nas duas PG`s e encontrar uma relação para $a$ e $r$:

$$S_1 = \frac{a_2}{1-r^2} = \frac{a_1 r}{1-r^2} = \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$$S_2 = \frac{a_3}{1-r^3} = \frac{a_1 r^2}{1-r^3} = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13}$$

Fatorando $S_1$ e $S_2$:

$$S_1 = \frac{ar}{1-r^2} = 4 \Rightarrow \frac{ar}{(1-r)(1+r)} = 4$$

$$S_2 = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13} \Rightarrow \frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)} = \frac{16}{13}$$

Vamos dividir $\frac{S_1}{S_2}$ para sumir com o termo $a$:

$$\frac{\frac{ar}{(1-r)(1+r)}}{\frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}} = \frac{4}{\frac{16}{13}}$$

$$\frac{ar}{ar^2}\frac{(1-r)(1+r+r^2)}{(1-r)(1+r)} = 4 \cdot \frac{13}{16}$$

$$\frac{\cancel{ar}}{\cancel{ar^2}}\frac{\cancel{(1-r)}(1+r+r^2)}{\cancel{(1-r)}(1+r)} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{(1+r+r^2)}{(1+r)} = \frac{13}{4}$$

Desenvolvendo a equação:

$$4(1+r+r^2) = 13r(1+r)$$

$$4 + 4r + 4r^2 = 13r + 13r^2$$

$$4r^2 + 9r - 4 = 0$$

Encontramos uma equação de segundo grau, ainda estudaremos esse assunto mais a fundo nas próximas aulas.

Lembre-se: as raízes de uma equação de segundo grau dessa forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

É dado por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = \mathrm{b}^2 - 4ac$$

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(9)(-4) = 81 + 144 = 225$$

$$r_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm 15}{18}$$

$$r_1 = \frac{-9 - 15}{18} = -\frac{4}{3}$$

$$r_2 = \frac{-9 + 15}{18} = \frac{1}{3}$$

O enunciado diz que a razão é positiva, logo $r = r_2 = \frac{1}{3}$.

Substituindo $r = 1/3$ em $S_1$ para encontrar $a$:

$$S_1 = \frac{ar}{1 - r^2} = 4$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 4$$

$$\frac{\left(\frac{a}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = 4$$

$$\frac{3a}{8} = 4$$

$$a = \frac{32}{3}$$

Vamos encontrar $a + r$:

$$a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

**Gabarito: $\boldsymbol{a + r = 11}$**

---

**55. (ITA/2005)**

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ para\ n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

**Comentários**

Temos uma PA infinita. A questão nos dá a fórmula do somatório de seus elementos em função de um $n \in \mathbb{N}$.

O somatório é a soma dos elementos $a_{3k}$, isso que dizer que ela é a soma dos elementos múltiplos de 3, isto é, $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_n$.

Vamos substituir os valores de $n$ e encontrar alguma relação.

Para $n = 1$:

$$a_3 = 1 \cdot \sqrt{2} + \pi 1^2$$

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi$$

Para $n = 2$:

$$a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + \pi(2)^2 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

Substituindo $a_3$ na equação para encontrar $a_6$:

$$\sqrt{2} + \pi + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$$

A forma geral dos elementos de uma PA é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A questão pede $a_1$ e $r$.

Vamos encontrar $a_3$ em função de $a_1$ e $r$:

$$a_3 = a_1 + (3-1)r = a_1 + 2r$$

Fazendo o mesmo para $a_6$:

$$a_6 = a_1 + (6-1)r = a_1 + 5r$$

Encontramos as relações:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$

$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi = a_1 + 5r$$

Subtraindo $a_6$ e $a_3$:

$$a_6 - a_3 = \sqrt{2} + 3\pi - \left(\sqrt{2} + \pi\right) = a_1 + 5r - (a_1 + 2r)$$

$$2\pi = 3r$$

$$r = \frac{2\pi}{3}$$

Substituindo $r$ em $a_3$ para encontrar $a_1$:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$

$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + \frac{4\pi}{3}$$

$$a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$$

**Gabarito:** $r = \frac{2\pi}{3}$ **e** $a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

---

**56. (ITA/2003)**

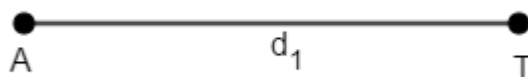
Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V a.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes $v_A$ e $v_T$, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \dots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \dots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, $d_n$ denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k$$

da corrida.

Verifique que os termos $t_k, k = 1, 2, 3, \dots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

**Comentários**

A situação inicial do problema diz que a tartaruga começa a uma distância $d_1$ de Aquiles, conforme a figura:

Da cinemática, como não temos aceleração, sabemos que esse problema trata de movimento uniforme e desse modo a equação do espaço é dado por:

$$\Delta S = v \cdot t$$

$\Delta S$ é a distância que separa os corpos A e T

$v$ é a velocidade

$t$ é o tempo

O tempo que Aquiles demora para percorrer $d_1$ será:

$$d_1 = v_A t_1$$

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A}$$

Mas até Aquiles percorrer $d_1$, a tartaruga continuou correndo e percorreu $d_2$. Essa distância em função dos dados da tartaruga é:

$$d_2 = v_T t_1$$

Substituindo $t_1$ na equação:

$$d_2 = \frac{v_T d_1}{v_A}$$

Agora Aquiles deve percorrer $d_2$ para alcançar a tartaruga:

$$d_2 = v_A t_2$$

$$t_2 = \frac{d_2}{v_A}$$

Substituindo $d_2$ encontrado com os dados da tartaruga nessa equação para obter $t_2$:

$$t_2 = \frac{\left(\frac{v_T d_1}{v_A}\right)}{v_A} = \frac{v_T d_1}{v_A^2}$$

A tartaruga continuou correndo e está a $d_3$ de distância de Aquiles:

$$d_3 = v_T t_2 = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^2}$$

Aquiles demora $t_3$ para percorrer $d_3$:

$$t_3 = \frac{d_3}{v_A} = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^3}$$

Perceba o padrão no formato do tempo:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A}$$

$$t_2 = \frac{v_T d_1}{v_A^2}$$

$$t_3 = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^3}$$

Repare que a diferença entre um termo e outro é a razão $q = \frac{v_T}{v_A}$, isso é uma PG. Se continuássemos as calcular os termos, encontraríamos a forma geral:

$$t_n = t_1 q^{(n-1)}$$

$$t_n = \left(\frac{d_1}{v_A}\right)\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}$$

$$t_n = \frac{d_1}{v_A}\frac{v_T^{n-1}}{v_A^{n-1}}$$

$$t_n = \frac{v_T^{n-1}}{v_A^n} d_1$$

Como $v_A > v_T$, temos $q = \frac{v_T}{v_A} < 1$. Assim, encontramos uma PG de razão $0 < q < 1$. Isso é uma PG infinita.

A soma será dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{t_1}{1 - \frac{v_T}{v_A}}$$

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A} \rightarrow S = \frac{\left(\frac{d_1}{v_A}\right)}{\frac{v_A - v_T}{v_A}} = d_1/v_A$$

$$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$$

$v_A - v_T$ é a velocidade relativa de Aquiles em relação à tartaruga e $d_1$ é a distância que separava os dois no começo da corrida. Então, $S$ é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.

**Gabarito: $S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$ e $S$ é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.**

---

**57. (ITA/2002)**

Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e responda, justificando:

Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

**Comentários**

Perceba que $A_n$ é a soma da PA. A soma da PA é dada pela fórmula:

$$A_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Vamos substituir essa fórmula nos números pedidos:

$$\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(a_1 + a_n)n}{2}\right)}{n} - a_n\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{(a_1 + a_n)n}{2n}\right) - a_n\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{(a_1+a_n)}{2}\right)-a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_n}{2}-a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2=\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(a_1+a_n)n}{2}\right)}{n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{(a_1+a_n)n}{2n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2$$

Para saber qual é maior, vamos subtrair os termos e ver se encontramos um número positivo ou negativo. Caso seja positivo, o primeiro termo será maior. Caso contrário, o segundo termo será maior. Perceba os termos elevados ao quadrado, não precisamos desenvolvê-los. Vamos usar produtos notáveis para simplificar os cálculos.

$$\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2-\left(\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2\right)$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2\right)$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2-\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2+a_n^2$$

Fatorando os termos coloridos:

$$\left[\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)-\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)+\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\right]+a_n^2$$

Simplificando:

$$\left(\frac{a_1 - a_n - a_1 - a_n}{2}\right)\left(\frac{a_1 - a_n + a_1 + a_n}{2}\right) + a_n^2$$

$$\left(\frac{-2a_n}{2}\right)\left(\frac{2a_1}{2}\right) + a_n^2$$

$$(-a_n)(a_1) + a_n^2$$

Colocando $a_n$ em evidência, obtemos:

$$a_n(a_n - a_1)$$

O enunciado afirma que os termos são positivos e a razão também. Portanto:

$$a_n = a_1 + (n-1)r > a_1$$

$$a_n > a_1$$

$$a_n(a_n - a_1) > 0$$

Assim, provamos que o termo azul é maior que o termo verde.

$$\therefore \left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 > \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Gabarito:** $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 > \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

---

**58. (ITA/2000)**

O valor de $n$ que torna a sequência

$$2 + 3n, -5n, 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) $[-2, -1]$.

b) $[-1, 0]$.

c) $[0, 1]$.

d) $[1, 2]$.

e) $[2, 3]$.

**Comentários**

Vamos usar a propriedade da Média Aritmética:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Dos dados da questão:

$$a_1 = 2 + 3n$$

$$a_2 = -5n$$

$$a_3 = 1 - 4n$$

Substituindo os dados na propriedade:

$$2(-5n) = (2 + 3n) + (1 - 4n)$$
$$-10n = 3 - n$$
$$-9n = 3$$
$$n = -\frac{1}{3}$$
$$-1 < -\frac{1}{3} < 0$$
$$\therefore n \in [-1, 0]$$

**Gabarito: "b".**

---

**59. (ITA/1998)**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1, 0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $8/27$

b) $20/27$

c) $26/27$

d) $30/27$

e) $38/27$

**Comentários**

Temos uma PG de razão $q = a_1$ com $0 < a_1 < 1$. A soma da PG infinita é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

O problema diz que $S = 3a_1$.

Substituindo os termos na fórmula, obtemos:

$$3a_1 = \frac{a_1}{1 - a_1}$$
$$3 = \frac{1}{1 - a_1}$$
$$1 - a_1 = \frac{1}{3}$$
$$a_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$q = a_1 = \frac{2}{3}$$

A soma dos três primeiros termos da PG será:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left(\frac{8}{27}\right) - 1\right)}{-\frac{1}{3}}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{19}{27}\right)}{-\frac{1}{3}}$$

$$S_3 = \frac{38}{27}$$

**Gabarito: "e".**

---

**60. (ITA/1995)**

Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0{,}3: 0{,}03: 0{,}003: \ldots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

a) $1/3$

b) $2/3$

c) $1$

d) $2$

e) $1/2$

**Comentários**

Vamos calcular a soma dos termos da progressão geométrica $(0{,}3; 0{,}03; 0{,}003; \ldots)$. Essa PG possui razão $q = 0{,}1 \Rightarrow |q| < 1$. Logo, sua soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}3 \\ q = 0{,}1 \end{cases}$$

$$S = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

A soma que obtemos é o termo médio de uma PA com três termos:

$$\left(a_1, \frac{1}{3}, a_3\right)$$

A soma da PA é dada por:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Das propriedades da PA, temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3$$

Sabemos que $a_2 = 1/3$.

$$a_1 + a_3 = 2a_2 = \frac{2}{3}$$

Desse modo:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_3) + a_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Temos uma PG de razão $q = a_1$ com $0 < a_1 < 1$. A soma da PG infinita é dada por:

**Gabarito: "c".**

---

**61. (ITA/1994)**

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a $2^{25}$ e o termo do meio é $2^5$. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$

b) $a_1 + q = 12$

c) $a_1 + q = 10$

d) $a_1 + q + n = 20$

e) $a_1 + q + n = 11$

**Comentários**

Segundo o enunciado, o produto dos termos da PG é:

$$P_n = 2^{25}$$

A fórmula do produtório dos termos da PG é dado por:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Então temos:

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{25}$$

Podemos reescrever a equação dessa forma:

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = a_1^n \left(q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = \left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n$$

$$\left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = 2^{25}$$

A questão diz que a PG possui um número ímpar de termos e que o termo do meio é $2^5$.

Vamos usar essas informações.

Veja que se $n$ é ímpar, então $n+1$ é par e $\frac{n+1}{2}$ será o índice do termo do meio.

Tome como exemplo a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Nesse caso, para $n = 5$, temos $a_5$ e o índice do termo do meio é $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ que é $a_3$.

Analisando a equação:

$$\left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = 2^{25}$$

A razão pode ser reescrita dessa forma:

$$q^{\frac{n-1}{2}} = q^{\frac{n+1-2}{2}} = q^{\frac{n+1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow \left(a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^n = 2^{25}$$

Usando o termo geral para o termo do meio da PG:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}$$

Do enunciado temos o valor do termo do meio, vamos substituir na equação:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = 2^5$$

$$\left(a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^n = 2^{25}$$

$$(2^5)^n = 2^{25}$$

$$2^{5n} = 2^{25}$$

$$5n = 25 \Rightarrow n = 5$$

Portanto, a PG possui 5 termos.

A última informação do enunciado diz que a soma dos $n-1$ termos da PG é $2(1+q)(1+q^2)$. Então, usando a fórmula da soma da PG finita:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1}-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

Substituindo $n = 5$:

$$S_4 = \frac{a_1(q^{5-1}-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

$$\frac{a_1(q^4-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

Podemos fatorar a expressão da esquerda:

$$\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^2+1)(q^2-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^2+1)(q+1)(q-1)}{q-1}$$

Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{a_1(q^2+1)(q+1)(q-1)}{q-1}=2(q+1)(q^2+1)$$

Perceba que os termos coloridos se cancelam. Dessa forma:

$$\frac{a_1\cancel{(q^2+1)}\cancel{(q+1)}\cancel{(q-1)}}{\cancel{(q-1)}}=2\cancel{(q+1)}\cancel{(q^2+1)}$$

$$a_1=2$$

Substituindo $a_1=2$ no termo do meio:

$$a_3=a_1q^2=2^5$$

$$2q^2=2^5\Rightarrow q^2=2^4$$

$$q=2^2=4$$

Observando as alternativas, vemos que:

$$a_1+q+n=2+4+5=11$$

**Gabarito: "e".**

---

**62. (IME/2019)**

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

**Comentários**

Precisamos mostrar que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG. A única condição é que os termos dessa PG sejam número naturais. Vamos supor que essa PG seja crescente de razão $q\in\mathbb{Q}$ e ver se encontramos uma PG com esses números.

$$\left(a_0,a_1,\dots,\underbrace{16}_{a_i},\dots,\underbrace{24}_{a_j},\dots,\underbrace{81}_{a_k},\dots,a_n\right)\ PG\ de\ razão\ q>0$$

Da relação dos termos da PG:

$$\begin{cases}a_j=a_i\cdot q^{j-i}\\a_k=a_j\cdot q^{k-j}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{24}{16}=q^{j-i}\ \ (1)\\\frac{81}{24}=q^{k-j}\ \ (2)\end{cases},com\ i,j,k\in\mathbb{N}$$

Simplificando a relação $(1)$, obtemos:

$$\frac{24}{16}=q^{j-i}\Rightarrow q^{j-i}=\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^1$$

Sendo $q\in\mathbb{Q}$ e $i,j\in\mathbb{N}$, devemos ter:

$$\boxed{q = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{j - i = 1}$$

Para a relação $(2)$:

$$\frac{81}{24} = q^{k-j} \Rightarrow q^{k-j} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

Aqui, podemos ter:

$$q = \frac{27}{8} \text{ e } k - j = 1 \text{ ou } q = \frac{3}{2} \text{ e } k - j = 3$$

Das condições das relações $(1)$ e $(2)$, concluímos que:

$$\begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ j - i = 1 \\ k - j = 3 \end{cases}$$

Desse modo:

$$j = i + 1$$

$$k = j + 3 = i + 4$$

A PG é do seguinte tipo:

$$\left(a_0, a_1, \ldots, \underbrace{16}_{a_i}, \underbrace{24}_{a_{i+1}}, a_{i+2}, a_{i+3}, \underbrace{81}_{a_{i+4}}, \ldots, a_n\right)$$

Vamos calcular $a_{i+2}$ e $a_{i+3}$:

$$a_{i+2} = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 36$$

$$a_{i+3} = 36 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 54$$

$$\boxed{(a_0, a_1, \ldots, 16, 24, 36, 54, 81, \ldots, a_n)}$$

Supondo que exista o termo $a_{i-1}$, devemos ter:

$$a_i = a_{i-1} \cdot q \Rightarrow a_{i-1} = \frac{16}{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3} \notin \mathbb{N}$$

Como $a_{i-1}$ não é um número natural, podemos concluir que $16$ é o termo inicial da PG e, assim, $i = 1$:

$$(16, 24, 36, 54, 81, a_6, \ldots, a_n)$$

Resta verificar se existe $a_6$:

$$a_6 = 81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{243}{2} \notin \mathbb{N}$$

$a_6$ não é um número natural, logo, $a_5 = 81$ é o último termo da PG.

Portanto, a PG possui 5 termos.

**Gabarito: 5 termos**

---

**63. (IME/2019)**

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é

a) $-1$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $0$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $1$

**Comentários**

Como os ângulos estão em PA, podemos encontrar a expressão que representa o somatório usando a fórmula da soma da PA.

Lembrando que essa fórmula é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} \theta_i = \frac{(\theta_1 + \theta_{100})100}{2} = 50(\theta_1 + \theta_{100})$$

O bizu nessa questão é perceber que os termos $\underbrace{\theta_1 + \theta_{100}}_{1+100=101} = \underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{11+90=101} = \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{26+75=101}$ são equidistantes. Assim, usando a propriedade dos termos equidistantes de uma PA:

$$\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$$

$$\underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{\theta_1 + \theta_{100}} + \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{\theta_1 + \theta_{100}} = \frac{\pi}{4}$$

$$2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{8}}$$

Então, o valor que queremos calcular é:

$$sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right) = sen(50(\theta_1+\theta_{100})) = sen\left(\frac{50\pi}{8}\right) = sen\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \boxed{sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

**Gabarito: "d".**

---

**64. (IME/2017)**

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão $r$ e razão $q$, respectivamente, onde $r$ e $q$ são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de $b_1$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

**Comentários**

Do enunciado, temos:

$$a_1 + b_2 = 3 \quad (I)$$

$$a_4 + b_3 = 26 \quad (II)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \text{ é PA} \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

$$(b_1, b_2, b_3, \dots) \text{ é PG} \Rightarrow b_2 = b_1 q \text{ e } b_3 = b_1 q^2$$

Reescrevendo as equações, obtemos:

$$a_1 + b_1 q = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - b_1 q \quad (I)$$

$$(a_1 + 3r) + b_1 q^2 = 26 \quad (II)$$

Substituindo $(I)$ em $(II)$:

$$(3 - b_1 q + 3r) + b_1 q^2 = 26$$

$$3r + b_1 q^2 - b_1 q = 26 - 3$$

$$3r + b_1 q(q-1) = 23 \quad (III)$$

A PA e a PG da questão possuem termos inteiros e $r$ e $q$ também são inteiros.

A questão nos dá uma desigualdade para $q$ e $b_1$. Repare que temos $b_1 q(q-1)$ na equação $(III)$. Vamos tentar encontrar alguma relação usando essas desigualdades.

Como $q$ é inteiro, podemos escrever:

$$q > 2 \Rightarrow q \geq 3$$

$$q - 1 \geq 3 - 1 \Rightarrow q - 1 \geq 2$$

$b_1$ também é inteiro:

$$b_1 > 0 \Rightarrow b_1 \geq 1$$

Das propriedades da desigualdade de números inteiros, podemos multiplicar os termos e encontrar uma nova desigualdade:

$$b_1 \geq 1$$

$$q \geq 3$$

$$q - 1 \geq 2$$

$$b_1 q(q-1) \geq 1 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b_1 q(q-1) \geq 6 \quad (IV)$$

Da equação $(III)$:

$$3r + b_1 q(q-1) = 23$$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3r$$

Dessa forma, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{cases} b_1 q(q-1) \geq 6 \\ b_1 q(q-1) = 23 - 3r \end{cases}$$

Combinando as duas, obtemos:

$$23 - 3r \geq 6$$

$$23 - 6 \geq 3r$$

$$17 \geq 3r$$

$$3r \leq 17$$

Sabemos que $r$ é inteiro positivo. Vamos ver quais valores de $r$ podemos ter com essa desigualdade.

$3r$ deve ser menor ou igual a $17$.

$r = 6$ já não satisfaz essa condição, pois $3r = 3 \cdot 6 = 18 > 17$.

$r = 5 \Rightarrow 3r = 15 < 17$

$r = 5$ satisfaz a condição, então $r$ deve ser menor ou igual a $5$, ou seja, $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Agora temos valores plausíveis para $r$, vamos substituir esses valores na equação $(III)$:

$$3r + b_1 q(q-1) = 23 \quad (III)$$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3r$$

a) $r = 5$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 5$$

$$b_1 q(q-1) = 8 = 2^3$$

Note que $q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos já que $q$ é inteiro positivo.

$b_1q(q-1) = 2 \cdot 2 \cdot 2$ é produto de inteiros iguais e $q \geq 3$. Não podemos ter $q$ e $q-1$ que satisfaz essas condições.

b) $r = 4$

$$b_1q(q-1) = 23 - 3 \cdot 4$$
$$b_1q(q-1) = 11$$

$b_1$ é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

11 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos

Não temos valores para $b_1, q$ que satisfaz essas condições.

c) $r = 3$

$$b_1q(q-1) = 23 - 3 \cdot 3$$
$$b_1q(q-1) = 14 = 2 \cdot 7$$

$b_1$ é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

Se $q = 2$ e $b_1 = 7$, teríamos $b_1q(q-1) = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$

Mas $q \geq 3$, então $q = 2$ não é possível.

Logo, não temos valores para $b_1, q$ que satisfaz essas condições.

d) $r = 2$

$$b_1q(q-1) = 23 - 3 \cdot 2$$
$$b_1q(q-1) = 17$$

$b_1$ é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

17 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos.

Não temos valores para $b_1, q$ que satisfaz essas condições.

e) $r = 1$

$$b_1q(q-1) = 23 - 3 \cdot 1$$
$$b_1q(q-1) = 20 = 4 \cdot 5$$

$b_1$ é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

20 é produto de inteiros consecutivos

Se $q = 5$ e $b_1 = 1$:

$$b_1 q(q-1) = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Para $r = 1$, temos valores para $b_1$ e $q$ que satisfazem o problema.

$$\therefore b_1 = 1$$

**Gabarito: "a".**

---

**65. (IME/2016)**

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos $a_1, a_2$ e $a_{10}$ estão em PG, assim como $a_6, a_j$ e $a_{25}$. Determine $j$.

**Comentários**

Se $a_1, a_2, a_{10}$ estão em PG nessa ordem, então das propriedades da PG, podemos escrever:

$$a_2^2 = a_1 a_{10}$$

Como $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão $r \neq 0$, podemos escrever esses termos em função do primeiro termo e da razão $r$:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + r$$

$$a_{10} = a + 9r$$

$$(a+r)^2 = a(a+9r)$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 9ar$$

$$r^2 = 7ar$$

$$r \neq 0 \Rightarrow r = 7a$$

$a_6, a_j, a_{25}$ também estão em PG $\Rightarrow a_j^2 = a_6 a_{25}$

Escrevendo $a_6$ e $a_{25}$ em função de $a$ e $r$:

$$a_6 = a + 5r$$

$$a_{25} = a + 24r$$

Substituindo $r = 7a$ nos termos:

$$a_6 = a + 5(7a) = 36a$$

$$a_{25} = a + 24(7a) = 169a$$

Encontrando uma relação para $a_j$:

$$a_j^2 = a_6 a_{25} = 36a \cdot 169a = 6^2 \cdot 13^2 \cdot a^2$$

$$a_j = \pm 6 \cdot 13 \cdot a$$

$$a_j = \pm 78a$$

Vamos testar os valores encontrados para $a_j$:

$$a_j = a + (j-1)r = a + (j-1)7a = a(7j-6)$$

I) $a_j = -78a$

$$-78a = a(7j-6)$$

$$-78 = 7j - 6$$

$$7j = -72$$

$$j < 0$$

$j$ é o índice do termo da PA, logo não pode ser negativo.

II) $a_j = 78a$

$$78a = a(7j-6)$$

$$78 = 7j - 6$$

$$7j = 84$$

$$j = 12$$

Esse valor satisfaz as condições do problema.

$$\therefore j = 12$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{j = 12}$

---

**66. (IME/2015)**

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

**Comentários**

Temos uma PA cuja soma é 244. Seja $a_1$, o primeiro termo, $r$, a razão e $n$, o número de termos, podemos escrever:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(a_1 + (a_1 + (n-1)r)\big)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = 244$$

Do enunciado, $(a_1, r, n)$ é uma PA de razão $r' = 1$. Então, vamos escrever as relações dessa PA:

$$r = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = r - 1$$

$$n = r + 1$$

Substituindo $r, n$ na equação da soma para descobrir o valor de $a_1$:

$$\frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = 244$$

$$\frac{\{2(r-1) + [(r+1) - 1]r\}(r+1)}{2} = 244$$

Simplificando a equação:

$$\{2(r-1) + r^2\}(r+1) = 488$$

$$(r^2 + 2r - 2)(r+1) = 488$$

$$r^3 + 2r^2 - 2r + r^2 + 2r - 2 = 488$$

$$r^3 + 3r^2 - 490 = 0$$

Temos que descobrir as raízes dessa equação. Vamos isolar o número 490 no outro lado da igualdade:

$$r^3 + 3r^2 = 490$$

$$r^2(r+3) = 490$$

Note que $490 = 49 \cdot 10$.

49 é um quadrado perfeito e pode ser escrito na forma $7^2$.

$$r^2(r+3) = 49 \cdot 10 = 7^2 \cdot 10$$

$$r^2(r+3) = 7^2 \cdot 10$$

Vamos ver se $r = 7$ é raiz, substituindo na equação acima:

$$7^2(7+3) = 7^2 \cdot 10$$

$$7^2 10 - 7^2 10 = 0$$

$$\therefore r = 7 \text{ é raiz}$$

Para encontrar as outras raízes, podemos aplicar o Algoritmo de Briot-Ruffini (ainda estudaremos esse assunto na aula de Polinômios). Veja:

| | 1 | 3 | 0 | -490 |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 10 | 70 | |

Então, obtemos a seguinte equação:

$$r^3 + 3r^2 - 490 = (r-7)(r^2 + 10r + 70) = 0$$

Calculando o delta da equação quadrática:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 70 = -180 < 0$$

Portanto, a equação quadrática não possui raízes reais.

O único $r$ que satisfaz o problema é $r = 7$.

(Todos os assuntos que não foram estudados ainda serão vistos futuramente, então não se preocupe se você não entendeu alguma etapa).

**Gabarito: "a".**

---

**67. (IME/2014)**

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

**Comentários**

Vamos simplificar a expressão.

Para o primeiro termo, temos:

$$\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} = \underbrace{370370370370\ldots37037}_{89\ algarismos}$$

Vamos escrever esse número em potências de 10:

$$370370370370\ldots37037 = 37\cdot10^{87} + 37\cdot10^{84} + 37\cdot10^{81} + \cdots + 37\cdot10^{3} + 37\cdot10^{0}$$

Perceba que escrevendo dessa forma, obtemos uma PG finita cujo primeiro termo é $a_1 = 37$ e razão é $q = 10^3$.

Podemos aplicar a fórmula para soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos calcular o número de termos dessa PG.

Pela forma da PG, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = 37\cdot10^{87} = 37\cdot(10^3)^{n-1}$$

$$37\cdot10^{87} = 37\cdot10^{3(n-1)}$$

$$3(n-1) = 87$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 30$$

Logo, a PG possui 30 termos.

Substituindo as variáveis na fórmula da soma, obtemos:

$$S_{30} = \frac{37((10^3)^{30} - 1)}{10^3 - 1}$$

Simplificando:

$$S_{30} = \frac{37(10^{90}-1)}{1000-1} = \frac{10^{90}-1}{\frac{999}{37}} = \frac{10^{90}-1}{27}$$

Vamos reescrever o segundo termo e colocá-lo em função de potências de 10:

$$\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\ \underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"} = \underbrace{(10^{29}+10^{28}+10^{27}+\cdots+10^{1}+10^{0})}_{PG\ de\ razão\ q=10\ e\ n=30}\cdot 10^{30}$$

$$10^{29}+10^{28}+10^{27}+\cdots+10^{1}+10^{0} = \frac{10^{0}(10^{30}-1)}{10-1} = \frac{10^{30}-1}{9}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\ \underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"} = \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}$$

Dessa forma, temos que calcular o valor da seguinte expressão:

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\ \underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}} = \sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}}$$

Podemos fatorar o termo $10^{90}-1$ usando a fatoração clássica:

$$10^{90}-1 = (10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)$$

Substituindo na expressão e simplificando:

$$\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{10^{30}}{9}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{3\cdot 10^{30}}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}+10^{30}+1-3\cdot 10^{30}}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}-2\cdot 10^{30}+1}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{30}-1)^2}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)^3}{3^3}} =$$

$$\frac{10^{30}-1}{3}=\frac{1}{3}\underbrace{999\ldots 9}_{30\ algs}=$$

$$\underbrace{333\ldots 3}_{30\ algs}$$

**Gabarito:** $\underbrace{\mathbf{333\ldots 3}}_{\mathbf{30\ algs}}$

---

**68. (IME/2014)**

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é $S_1$ e a soma de seus quadrados é $S_2$. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) 1

**Comentários**

Temos uma PA crescente e a questão nos dá a soma dos três termos consecutivos $S_1$ e a soma de seus quadrados $S_2$. Vamos representar a PA dessa forma:

$$(a-r, a, a+r)$$

Assim, podemos escrever:

$$S_1 = (a-r) + a + (a+r) = 3a$$

$$S_1 = 3a$$

$$S_2 = (a-r)^2 + a^2 + (a+r)^2$$

$$S_2 = a^2 - 2ar + r^2 + a^2 + a^2 + 2ar + r^2$$

$$S_2 = 3a^2 + 2r^2$$

Os dois maiores termos da PA são $a$ e $a+r$ e são também raízes da equação:

$$x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Substituindo $S_1$ e $S_2$:

$$x^2 - 3ax + \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Estudaremos relações de Girard na aula de Expressões Algébricas. Das relações de Girard, podemos escrever:

$$a'x^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a'}$$

$$a + (a + r) = -\frac{-3a}{1} = 3a$$

$$r = a$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a'}$$

$$a(a + r) = \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 + ar = 3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}$$

Substituindo $r = a$, na equação acima:

$$a^2 + aa = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$2a^2 = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$3a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{6}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} = r$$

Como a PA é crescente, temos $r = \sqrt{6}/6$.

**Gabarito: “b”.**

---

**69. (IME/2013)**

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão $r$ e $q$, respectivamente, onde $r$ e $q$ são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12

b) 48

c) 66

d) 99

e) 129

**Comentários**

Do enunciado podemos extrair as seguintes informações:

$$\underbrace{(3, \dots, 192)}_{n\ termos} \text{ PA de razão } r \in \mathbb{Z}$$

$$\underbrace{(3, \dots, 192)}_{n\ termos} \text{ PG de razão } q \in \mathbb{Z}$$

O terceiro termo de $\left(1+\frac{1}{q}\right)^8$ em potências crescentes de $\frac{1}{q}$ é $\frac{r}{9q}$.

Não se preocupe se você não entendeu essa parte do problema, isso será explicado detalhadamente na aula de Análise Combinatória. Para resolver essa parte precisamos do conhecimento da Fórmula do Binômio de Newton.

A Fórmula do Binômio de Newton pode ser escrita como:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

$\binom{n}{p}$ é chamado de número binomial $n$ sobre $p$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \dots \cdot 2\cdot 1$$

$n!$ é chamado de fatorial do número $n$.

Voltando ao problema, podemos escrever:

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^8 = \binom{8}{0}1^8 + \binom{8}{1}1^{8-1}\left(\frac{1}{q}\right) + \binom{8}{2}1^{8-2}\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \cdots + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{q}\right)^8$$

O terceiro termo dessa expansão em potências crescentes de $1/q$ é:

$$\binom{8}{2}1^{8-2}\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \binom{8}{2}1^6\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{8!}{2!\,6!}\left(\frac{1}{q^2}\right) = \frac{28}{q^2}$$

A questão afirma:

$$\frac{28}{q^2} = \frac{r}{9q} \rightarrow qr = 9\cdot 28 = 3^2 2^2 7$$

Da PA, podemos escrever:

$$192 = 3 + (n-1)r$$

$$(n-1)r = 189$$

Da PG:

$$192 = 3q^{n-1}$$

$$64 = q^{n-1}$$

$$2^6 = q^{n-1}$$

Como $q$ é um número inteiro, $q$ deve ser múltiplo de $2$. $n-1$ é um número natural, então podemos ter os seguintes casos possíveis:

$$q = 2\ e\ n-1 = 6\ (I)$$

$$q = 4 \; e \; n - 1 = 3 \; (II)$$

$$q = 8 \; e \; n - 1 = 2 \; (III)$$

Vamos testar esses casos na condição da PA:

$$(n-1)r = 189$$

$$r = \frac{189}{n-1}$$

$r$ também é um número inteiro, então 189 deve ser divisível por $n - 1$.

Note que $189$ não possui o número $2$ como fator, logo ele não é divisível por números com fator $2$. Dessa condição, apenas a $(II)$ não possui $2$ como fator. $189$ é divisível por $3$, pois seus algarismos somados são divisíveis por $3$ $(1 + 8 + 9 = 18)$.

Assim, $n - 1 = 3 \rightarrow r = \frac{189}{3} \rightarrow r = 63$.

O segundo termo da PA é dado por:

$$a_2 = 3 + r = 3 + 63 = 66$$

**Gabarito: "c"**

---

**70. (IME/2012)**

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão $r$, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão $q$, com $q \; e \; r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão $r$;

b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

**Comentários**

a) Do enunciado:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ PA de razão } r \in \mathbb{N}^*$$

$$(a_2, a_7, a_{27}) \text{ PG de razão } q \in \mathbb{N}^*$$

Das propriedades da PG, podemos escrever:

$$a_7^2 = a_2 a_{27}$$

Usando as definições de PA, podemos reescrever os seus termos:

$$a_7 = a_2 + 5r$$

$$a_{27} = a_2 + 25r$$

Substituindo esses valores na equação, obtemos:

$$(a_2 + 5r)^2 = a_2(a_2 + 25r)$$

$$a_2^2 + 10a_2r + 25r^2 = a_2^2 + 25a_2r$$

$$25r^2 - 15a_2r = 0$$

$$5r^2 - 3a_2r = 0$$

$$r(5r - 3a_2) = 0$$
$$r \in \mathbb{N}^* \to r \neq 0$$
$$5r - 3a_2 = 0 \to r = \frac{3a_2}{5}$$

$a_2$ é um número inteiro conforme a questão e $r$ é um número natural diferente de zero.

O problema pede o menor valor possível para $r$. $r$ será mínimo quando $a_2$ for mínimo, então para $r$ ser natural, devemos ter $a_2 = 5$. O que implica $r = 3$.

b) Para a condição do item (a), temos:

$$a_{18} = a_2 + 16r$$
$$a_{18} = 5 + 16(3)$$
$$a_{18} = 53$$

**Gabarito: a) $r = 3$ b) $a_{18} = 53$**

---

**71. (IME/2010)**

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de $S$ satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

**Comentários**

Nessa questão, você deve se lembrar que na aula de Álgebra Elementar, na lista de exercícios, demonstramos que a seguinte relação é válida:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

É normal não ter memorizado essa fórmula, então, vamos aprender a deduzi-la. Sabendo que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, temos:

$$1^3 = 1^3$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$
$$3^3 = (1+2)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3$$
$$4^3 = (1+3)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3^2 + 3^3$$
$$\vdots$$
$$n^3 = \left(1 + (n-1)\right)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (n-1) + 3 \cdot 1 \cdot (n-1)^2 + (n-1)^3$$

Somando todas essas equações, obtemos:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$$
$$= n\cdot 1^3+3\cdot 1^2\cdot\big(1+2+3+\cdots+(n-1)\big)+3\cdot 1\cdot(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)$$
$$+(1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3)$$

Vamos definir $X=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

Note que os termos em vermelho se eliminam. A soma dos termos em azul é a soma de uma PA de razão 1 e a soma verde é a soma $X-n^2$. Assim, podemos escrever:

$$n^3=n+\frac{3\big(1+(n-1)\big)(n-1)}{2}+3(X-n^2)$$

Isolando $X$:

$$n^3=n+\frac{3n(n-1)}{2}+3X-3n^2$$
$$2n^3=2n+3n^2-3n+6X-6n^2$$
$$2n^3=6X-n-3n^2$$
$$6X=2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$$

Portanto, encontramos a fórmula para a soma dos naturais elevados ao quadrado:

$$X=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vamos voltar à resolução da questão:

Perceba que $S$ é a soma dos números naturais ímpares elevados ao quadrado.

Para calcular $S=1^2+3^2+5^2+\cdots+79^2$, precisamos completar a soma com os números pares.

Podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+79^2-(2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots+78^2)$$
$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+79^2-((2\cdot 1)^2+(2\cdot 2)^2+(2\cdot 3)^2+\cdots+(2\cdot 39)^2)$$
$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+79^2-(2^2\cdot 1^2+2^2\cdot 2^2+2^2\cdot 3^2+\cdots+2^2\cdot 39^2)$$
$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+79^2-4(1^2+2^2+3^2+\cdots+39^2)$$

Sabendo que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Temos:

$$S=\frac{79(79+1)(2\cdot 79+1)}{6}-\frac{4\big(39(1+39)(2\cdot 39+1)\big)}{6}$$
$$S=\frac{79\cdot 80\cdot 159}{6}-\frac{4(39\cdot 40\cdot 79)}{6}$$

Simplificando:

$$S=79\cdot 40\cdot 53-2\cdot 13\cdot 40\cdot 79$$

Perceba que temos os termos $79 \cdot 40$ nos dois números acima. Vamos fatorar:

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 53 - 26 \cdot 40 \cdot 79$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot (53 - 26)$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 27$$

Agora, podemos calcular o valor de $S$:

$$S = 85320$$

$S$ é um número entre 80000 e 90000.

$$\therefore \boxed{8x10^4 \leq S < 9x10^4}$$

Atenção! Sempre que você puder, você deve fatorar os números para facilitar o cálculo.

**Gabarito: "c".**

---

**72. (IME/2010)**

A quantidade $k$ de números naturais positivos, menores do que $1000$, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:

a) $k < 720$

b) $720 \leq k < 750$

c) $750 \leq k < 780$

d) $780 \leq k < 810$

e) $k \geq 810$

**Comentários**

Das informações da questão:

$$k < 1000 \; e \; k \in \mathbb{N}_+$$

Seja $x$ a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8.

$k$ será dada por:

$$k = 999 - x$$

Para calcular $n$, devemos somar a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8 e depois subtrair a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8 ao mesmo tempo (esses elementos acabam sendo somados 2 vezes). Os elementos que são divisíveis por 6 e por 8 são os múltiplos do MMC:

$$MMC[6; 8] = 24$$

Dessa forma, vamos encontrar a quantidade de elementos divisíveis por 6:

$$(6, 12, 18, \dots, a_n)$$

Usando a forma geral da PA:

$$a_n = 6 + (n - 1)6 < 1000$$

$$n-1<\frac{994}{6}$$

$$n<1+\frac{994}{6}\cong 166{,}6$$

$$n=166$$

Elementos divisíveis por 8:

$$(8,16,\dots,a_m)$$

$$a_m=8+(m-1)8<1000$$

$$m-1<\frac{992}{8}$$

$$m<1+124=125$$

$$m=124$$

Elementos divisíveis por 24:

$$(24,48,\dots,a_l)$$

$$a_l=24+(l-1)24<1000$$

$$l-1<\frac{976}{24}$$

$$l<1+\frac{976}{24}\cong 41{,}6$$

$$l=41$$

$$\Rightarrow x=m+n-l=166+124-41=249$$

Portanto, $k$ será dada por:

$$k=999-249=750$$

**Gabarito: “c”.**

---

**73. (IME/2000)**

Determine o polinômio em $n$, com no máximo $4$ termos, que representa o somatório dos quadrados dos $n$ primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2$$

**Comentários**

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Vamos substituir os valores de $n\in\mathbb{N}^*$ na fórmula e ver o que obtemos.

$$S_1=1^2=1$$

$$S_2=2^2+1^2=5$$

$$S_3 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$
$$S_4 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$$
$$\vdots$$

Veja que obtemos a sequência:

$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

Perceba que subtraindo os termos consecutivos, obtemos uma PA estacionária:

$$(3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

Logo, a sequência do problema é uma PA de ordem 2. De acordo com o teorema da soma, podemos escrever $S_n$ como um polinômio de grau 3:

$$S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Temos 4 incógnitas $(A, B, C, D)$, então precisamos de 4 equações:

$$S_1 = A(1)^3 + B(1)^2 + C(1) + D = A + B + C + D = 1 \quad (I)$$
$$S_2 = A(2)^3 + B(2)^2 + C(2) + D = 8A + 4B + 2C + D = 5 \quad (II)$$
$$S_3 = A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 27A + 9B + 3C + D = 14 \quad (III)$$
$$S_4 = A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 64A + 16B + 4C + D = 30 \quad (IV)$$

Vamos resolver o sistema linear:

$(IV) - (III)$:

$$37A + 7B + C = 16 \quad (V)$$

$(III) - (II)$:

$$19A + 5B + C = 9 \quad (VI)$$

$(II) - (I)$:

$$7A + 3B + C = 4 \quad (VII)$$

$(V) - (VI)$:

$$18A + 2B = 7 \quad (VIII)$$

$(VI) - (VII)$:

$$12A + 2B = 5 \quad (IX)$$

$(VIII) - (IX)$:

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Substituindo $A = 1/3$ em $(IX)$:

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 2B = 5$$
$$4 + 2B = 5$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/3$ e $B = 1/2$ em $(VII)$:

$$7\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + C = 4$$
$$\frac{7}{3} + \frac{3}{2} + C = 4$$
$$\frac{(14+9)}{6} + C = 4$$
$$\frac{23}{6} + C = 4$$
$$C = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$$

Substituindo $A, B, C$ em $(I)$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + D = 1$$
$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$
$$\frac{6}{6} + D = 1$$
$$D = 0$$

Assim, obtemos o polinômio:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$

---

**74. (IME/1996)**

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998\cdot 3001}$$

**Comentários**

Essa expressão é uma soma telescópica. Apesar da questão ser antiga, pode ser que ela seja cobrada no seu vestibular. O IME adora questões que exigem que o aluno já tenha visto algo parecido durante sua preparação.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar $A$ e $B$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{A}{1}+\frac{B}{4}\Rightarrow \frac{1}{4}=A+\frac{B}{4}\Rightarrow A=\frac{1-B}{4}\quad (I)$$

$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\Rightarrow \frac{1}{28}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\quad (II)$$

Substituindo $(I)$ em $(II)$ para encontrar $B$:

$$\frac{1}{28}=\frac{\frac{1-B}{4}}{4}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{1-B}{16}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{(1-B)7+B\cdot 16}{16\cdot 7}$$

$$16\cdot\frac{7}{28}=(1-B)7+B\cdot 16$$

$$4=7-7B+16B$$

$$-3=9B$$

$$B=-\frac{1}{3}$$

Substituindo $B$ em $(I)$:

$$A=\frac{1-B}{4}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$$

Encontramos $A=1/3$ e $B=-1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3a_n}-\frac{1}{3a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de $S$:

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2995}-\frac{1}{2998}\right)+\left(\frac{1}{2998}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{2995}}-\cancel{\frac{1}{2998}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2998}}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3001}\right)$$
$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r = 3, a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3001}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{S = \frac{1000}{3001}}$

---

# 9. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da nossa aula. Aprendemos as principais sequências que serão cobradas no vestibular. A maioria das questões que cobram sequências seguem o mesmo tipo de raciocínio, basta saber como trabalhar com as variáveis e saber aplicar as ideias aprendidas nessa aula.

Eu sei que o caminho para a aprovação é árduo, mas no final você verá que valerá todo o esforço. Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

# 10. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Hazzan, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. Atual, 2013. 282p.

[2] Antar Neto, Aref. Sampaio, José Luiz Pereira. Lapa, Nilton. Cavallantte, Sidney Luiz. Noções de Matemática, v.2. 1 ed. Vestseller, 2009. 253p.

[3] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Lima, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio, v. 2. 7 ed. SBM, 2016. 305p.

[4] Oliveira, Marcelo Rufino de. Carneiro, Manoel Leite. Elementos da Matemática volume 3 – sequências, análise combinatória, matriz. 3 ed. Vestseller, 2010. 343p.